Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Annamaria Montanari

Regolarizzazione delle soluzioni classiche e viscose per equazioni di tipo curvatura di Levi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1999), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 119–122.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_1S_119_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 2-A Suppl. (1999), pag. 119-122

Regolarizzazione delle soluzioni classiche e viscose per equazioni di tipo curvatura di Levi.

ANNAMARIA MONTANARI

Scopo della tesi è lo studio delle proprietà di regolarità delle soluzioni di equazioni associate all'operatore di Levi.

L'operatore di Levi interviene nella caratterizzazione dei domini di olomorfia per funzioni olomorfe di più variabili complesse. Ricordiamo che un insieme aperto $\Omega \subseteq \mathbf{C}^2$ è un dominio di olomorfia se, per ogni $p \in \partial\Omega$, esiste una funzione f olomorfa in Ω e completamente singolare in p, cioè tale che per ogni intorno U di p non esiste alcuna funzione olomorfa in U che coincide con f in qualche componente connessa di $U \cap \Omega$.

E.E. Levi nel 1909 fu il primo che pensò di caratterizzare i domini di olomorfia con bordo di classe C^2: egli aveva osservato che se $\Omega = \{\varrho(z_1, z_2) < 0\}$ è un dominio di olomorfia allora la matrice hessiana complessa di ϱ, «ristretta» allo spazio tangente complesso, è semidefinita positiva. Precisamente, se si restringe la forma hermitiana (oggi chiamata forma di Levi)

$$\Lambda(\xi_1, \xi_2) := \sum_{\alpha, \beta = 1}^{2} \varrho_{z_\alpha \bar{z}_\beta} \xi_\alpha \bar{\xi}_\beta .$$

alla retta tangente complessa a $M := \{\varrho = 0\}$, cioè ai vettori del tipo $(\lambda \varrho_{z_2}, -\lambda \varrho_{z_1})$, $\lambda \in \mathbf{C}$, si ottiene una forma hermitiana di una variabile

$$\lambda \rightarrow |\lambda|^2 (\varrho_{z_1\bar{z}_1} \varrho_{z_2} \varrho_{\bar{z}_2} - \varrho_{z_1\bar{z}_2} \varrho_{z_2} \varrho_{\bar{z}_1} - \varrho_{z_2\bar{z}_1} \varrho_{z_1} \varrho_{\bar{z}_2} + \varrho_{z_2\bar{z}_2} \varrho_{z_1} \varrho_{\bar{z}_1}).$$

Per analogia con quanto succede per le «ipersuperfici» reali in $\mathbf{R}^2$ chiamiamo allora curvatura di Levi di M in un punto (z_1, z_2) il numero reale

$$k = \frac{(\varrho_{z_1\bar{z}_1} \varrho_{z_2} \varrho_{\bar{z}_2} - \varrho_{z_1\bar{z}_2} \varrho_{z_2} \varrho_{\bar{z}_1} - \varrho_{z_2\bar{z}_1} \varrho_{z_1} \varrho_{\bar{z}_2} + \varrho_{z_2\bar{z}_2} \varrho_{z_1} \varrho_{\bar{z}_1})}{(|\varrho_{z_1}|^2 + |\varrho_{z_2}|^2)^{3/2}} .$$

Allora se Ω è un dominio di olomorfia deve essere $k \geq 0$ in ogni punto di M.

Il problema di Levi consiste nel provare il viceversa ed è stato risolto da Oka nel 1942: se k è positiva allora Ω è un dominio di olomorfia. In particolare le sfere di $\mathbf{C}^2$ sono domini di olomorfia in quanto la loro curvatura è costante e uguale all'inverso del loro raggio.

Se introduciamo le coordinate complesse $z_1 = (x, y)$, $z_2 = (t, s)$ e scriviamo localmente l'ipersuperficie M come grafico di una funzione u di classe C^2,

$$M := \{s - u(x, y, t) = 0\},$$

allora la curvatura di Levi di M si esprime in termini di u nella forma seguente

$$k(\cdot\,,\,u) = -\frac{(1+u_t^2)\,\mathcal{L}u}{2(1+|\nabla u|^2)^{3/2}}\,, \tag{1}$$

ove $\mathcal{L}$ è l'operatore alle derivate parziali del secondo ordine

$$\mathcal{L} := \partial_{xx} + \partial_{yy} + 2a\partial_{xt} + 2b\partial_{yt} + (a^2+b^2)\,\partial_{tt}, \tag{2}$$

i cui coefficienti sono funzioni del gradiente di u

$$a = a(\nabla u) = \frac{u_y - u_x u_t}{1+u_t^2}\,, \qquad b = b(\nabla u) = -\frac{u_x + u_y u_t}{1+u_t^2}\,.$$

Qui abbiamo indicato con u_x, u_y, u_t le derivate parziali di u rispetto a x, y, t rispettivamente. In seguito chiameremo $\mathcal{L}$ l'operatore di Levi in $\mathbf{R}^3$. Inoltre, se Ω è un aperto di $\mathbf{R}^3$ e $k : \Omega \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è una funzione continua, chiameremo equazione di Levi con assegnata curvatura k la seguente:

$$\mathcal{L}u = -2k(\cdot\,,\,u)\,\frac{(1+|\nabla u|^2)^{3/2}}{1+u_t^2}\,. \tag{3}$$

Ovviamente, il grafico di ogni soluzione di (3) ha curvatura di Levi uguale a k.

L'Equazione (3) è un'equazione quasilineare del secondo ordine la cui forma caratteristica è semidefinita positiva ed ha minimo autovalore nullo in ogni punto e per ogni u. Pertanto l'operatore di Levi è non ellittico in ogni punto. In [1] si osserva per la prima volta che l'operatore $\mathcal{L}$ si può scrivere formalmente come somma di quadrati di operatori differenziali del primo ordine non lineari. Questi operatori del primo ordine determinano la «geometria naturale» dell'equazione e le loro proprietà risultano fondamentali per lo studio della regolarità delle soluzioni. Nella tesi definiamo allora i campi vettoriali

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a(\nabla u) \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b(\nabla u) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

e, identificando un campo vettoriale con l'operatore differenziale del primo ordine avente gli stessi coefficienti, scriviamo

$$\mathcal{L} = (1+u_t^2)(X^2+Y^2)\,. \tag{5}$$

Nel caso in cui i campi X e Y siano campi lineari, a coefficienti C^∞, l'ipotesi che garantisce l'ipoellitticità è la ben nota condizione di Hörmander: $\mathcal{L}$ è ipoellittico se l'algebra di Lie generata dai campi ha rango massimo in ogni punto dello spazio. Se questa è verificata Rothschild e Stein hanno costruito una teoria sistematica della regolarità. Nel caso in esame invece i campi X e Y sono non lineari e quindi i loro coefficienti hanno soltanto la regolarità del gradiente della soluzione. Tuttavia X e Y soddisfano la condizione seguente:

$$[X, Y] = -\frac{\mathcal{L}u}{1+(\partial_t u)^2}\partial_t = 2\frac{k(\cdot, u)(1+|\nabla u|^2)^{3/2}}{(1+(\partial_t u)^2)^2}\partial_t. \tag{6}$$

Pertanto condizioni di annullamento di k sono condizioni di lineare dipendenza di $X, Y, [X, Y]$ e il comportamento delle soluzioni dell'equazione dipende dagli zeri di k.

Se $k \equiv 0$, ogni funzione u della sola variabile t è soluzione di $\mathcal{L}u = 0$, quindi non possono valere teoremi di regolarità, nel complesso delle variabili, per le soluzioni dell'equazione. In questo caso l'equazione si scrive semplicemente

$$X^2 u + Y^2 u = 0$$

e la relazione (6) consente di interpretarla come un Laplaciano su una opportuna varietà bidimensionale. Infatti è stato provato da Ščerbina che *se $u \in C^1$ è soluzione di* (3), *con $k \equiv 0$, allora il suo grafico è fogliato in curve analitiche.*

Se invece k non ha zeri ed è di classe C^∞ allora i campi $X, Y, [X, Y]$ sono linearmente indipendenti in ogni punto. Usando questa osservazione Citti in [1] ha dimostrato che ogni soluzione $C^{2,\alpha}$, con $\alpha > 1/2$, è C^∞.

Nella prima parte della tesi definiamo l'operatore $\mathcal{L}$ di curvatura media di Levi come la naturale generalizzazione allo spazio $\mathbf{R}^{2n+1}$ dell'operatore definito in (2). Il principale risultato di questa parte è il seguente: *sia Ω un aperto di $\mathbf{R}^{2n+1}$ e sia $u \in C^{2,\alpha}_{loc}(\Omega)$ tale che*

$$\mathcal{L}u = K(\cdot, u, \nabla u) \quad in \quad \Omega\,,$$

ove K è una funzione $C^\infty(\Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{2n+1})$. Se $K \neq 0$ in $\Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{2n+1}$ allora $u \in C^\infty(\Omega)$.

Anche nel caso $n > 1$ l'equazione si rappresenta, a meno di un fattore moltiplicativo, come somma di quadrati di campi vettoriali non lineari che, insieme alla somma dei loro commutatori, generano $\mathbf{R}^{2n+1}$ in ogni punto. Per studiarne le soluzioni mettiamo a punto una teoria della regolarità ad hoc per una classe di operatori lineari, che chiamiamo di tipo Levi, a coefficienti poco regolari in $\mathbf{R}^{2n+1}$. La regolarità C^∞ delle soluzioni dell'equazione non lineare si ottiene dai precedenti mediante un argomento di tipo «bootstrap».

Nella seconda parte della tesi consideriamo il problema della regolarità delle soluzioni dell'equazione di Levi con curvatura che si può annulare in qualche punto. Il principale risultato di questa parte è il seguente: *se $u \in C^{3,\alpha}_{loc}(\Omega)$ è una soluzione dell'equazione di Levi (3) con $k \in C^\infty(\Omega \times \mathbf{R})$ e*

$$k^2(\xi, u) + (Xk)^2(\xi, u) + (Yk)^2(\xi, u) > 0 \quad \text{per ogni } (\xi, u) \in \Omega \times \mathbf{R}\,,$$

allora u è di classe C^∞.

Osserviamo che anche in questo caso i campi X, Y ed i loro commutatori generano tutto lo spazio. Sia ad esempio $Xk(\bar{\xi}, u) \neq 0$, allora $X_{|\bar{\xi}}, Y_{|\bar{\xi}}, [X, [X, Y]]_{|\bar{\xi}}$ sono linearmente indipendenti. Costruiamo allora una teoria della regolarità per operatori lineari modellati sull'operatore di Levi, che chiamiamo di passo 3, perché per generare $\mathbf{R}^3$ è necessario considerare i commutatori di X e di Y di lunghezza 3.

Nella terza parte della tesi si affronta il problema della regolarizzazione delle soluzioni di viscosità dell'equazione di Levi generalizzata

$$\mathcal{L}u = k(\cdot, u), \tag{7}$$

ove $\mathcal{L}$ è ancora l'operatore di Levi definito in (2). Sono chiamate *soluzioni viscose* di (7) le funzioni u localmente lipschitziane, limite per $\varepsilon_j \to 0$ di successioni equilipschitziane (u_j) di soluzioni dell'equazione ellittica

$$\mathcal{L}u + \varepsilon_j^2 \frac{\partial_{tt} u}{1 + (\partial_t u)^2} = k(\cdot, u) \quad \text{in } \Omega . \tag{8}$$

Dopo aver mostrato che tali soluzioni di viscosità si presentano in modo naturale nello studio dei problemi al contorno per (7), vengono dimostrati teoremi di regolarizzazione analoghi a quelli $W^{2,2}$ per le equazioni ellittiche classiche. Questi risultati ci consentono di dimostrare che le soluzioni viscose verificano l'equazione (7) in senso puntale quasi dappertutto. La dimostrazione si ottiene stabilendo dapprima stime L^2 uniformi in j, per le derivate prime e seconde delle soluzioni u_j di (8) nelle direzioni dei campi vettoriali non lineari X e Y, che consentono di scrivere $X^2 u + Y^2 u$ e $[X, Y]$ in senso debole.

Se poi si suppone $k \neq 0$ in ogni punto, dai risultati precedenti, mediante un procedimento iterativo di tipo Moser, si ottengo stime L^∞ per $\varepsilon^2 u_{tt}$ dalle quali si ricava la seguente informazione cruciale: se u è soluzione viscosa di (7) allora il commutatore $[X, Y]$ è linearmente indipendente da X e Y. Da questo risultato si ottengono ulteriori proprietà di regolarità per le soluzioni viscose dell'equazione di Levi generalizzata, la più forte delle quali è la seguente: Xu, $Yu \in H^1_{loc}(\Omega)$, $\partial_t u \in H^{1/2}_{loc}(\Omega)$, ove H^s indica lo spazio di Sobolev ordinario di ordine s.

La dimostrazione di questa affermazione conclude la tesi, i cui risultati sono in parte pubblicati nei lavori [2], [3], [4], [5], ai quali si rimanda per maggiori dettagli e riferimenti bibliografici.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Citti, *C^∞ regularity of solutions of a quasilinear equation related to the Levi operator*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, cl. Sci. 3, 23 (1996), 483-529.

[2] G. Citti and A. Montanari, *C^∞ regularity of solutions of an equation of Levi's type in* $\mathbf{R}^{2n+1}$, preprint.

[3] G. Citti and A. Montanari, *Regularity for non Levi-flat graphs*, preprint.

[4] G. Citti and A. Montanari, *Strong solutions for the Levi curvature equation*, to appear on Advances in Differential Equations.

[5] A. Montanari, *C^∞ regularity of solutions of the Levi equation in* $\mathbf{R}^{2n+1}$, Ann.Univ. Ferrara, Nuova Ser., Sez. VII, Suppl., **41** (1996), 217-225.

Dipartimento di Matematica, Università di Bologna,
e.mail: montanar@dm.unibo.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Bologna) - Ciclo IX
Direttore di ricerca: Prof. E. Lanconelli, Università di Bologna