Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Fabio Paronetto

G-convergenza per una classe di equazioni ellittiche e paraboliche degeneri

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1999), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 127–130.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_1S_127_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 2-A Suppl. (1999), pag. 127-130

G-convergenza per una classe di equazioni ellittiche e paraboliche degeneri.

FABIO PARONETTO

In questa tesi viene studiato il comportamento asintotico di alcune classi di operatori ellittici e parabolici noto in letteratura con il nome di *G-convergenza*.

Si consideri una successione di operatori A_h, $h \in \mathbb{N}$, ognuno dei quali definito in V_h spazio di Banach riflessivo e separabile (o in un suo sottospazio), in modo tale che

$$A_h \colon V_h \to V_h' \quad \text{isomorfismo per ogni } h$$

e si supponga che esista uno spazio V tale che $V_h \subseteq V$ con immersione continua. Data f scelta opportunamente ($f \in S$ con S denso in ogni V_h') si considerino i problemi

$$(L_h) \qquad \begin{cases} A_h u = f \\ u \in V_h \end{cases}$$

e si denotino con $u_h = A_h^{-1} f$ le soluzioni. Si supponga che la successione $(u_h)_h$ converga, rispetto alla topologia debole di V, ad un elemento $u_\infty \in V$.

Ciò che ci si chiede è se per caso u_∞ non sia soluzione di un problema

$$(L_\infty) \qquad \begin{cases} A_\infty u = f \\ u \in V_\infty \end{cases}$$

con $V_\infty \subseteq V$, $A_\infty \colon V_\infty \to V_\infty'$ isomorfismo, A_∞ «della stessa forma» degli A_h. Più precisamente, esiste un operatore

$$A_\infty \colon V_\infty \to V_\infty' \qquad \text{isomofismo}, \qquad V_\infty \subseteq V,$$

tale che

$$A_h^{-1} f \to A_\infty^{-1} f \quad \text{in } V-\text{deb} \qquad \text{per ogni } f \in S?$$

La lettera G viene appunto dal fatto che tale convergenza sugli operatori A_h è data tramite una convergenza puntuale degli operatori di Green.

Il problema che si vuole risolvere è quello di trovare delle classi X di operatori compatte rispetto a tale tipo di convergenza, o almeno delle coppie di classi (X, Y) con X relativamente compatta in Y.

Nella tesi viene studiato il comportamento delle soluzioni deboli u_h, $h \in \mathbb{N}$, per

$h \to \infty$ dei problemi di Dirichlet

$$(E_h) \qquad \begin{cases} -\operatorname{div}(a_h(x) \cdot Dv) = f & \text{su } \Omega \\ v = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

e di Cauchy-Dirichlet

$$(P_h) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \operatorname{div}(a_h \cdot Dv) = f & \text{su } \Omega \times (0, T) \\ v = 0 & \text{su } (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times (0, T)), \end{cases}$$

dove Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, $T > 0$ e f una funzione data, e le matrici $a_h(x) = [a_{h,ij}(x)]_{i,j=1}^n$ $a_h(x, t) = [a_{h,ij}(x, t)]_{i,j=1}^n$ verificano rispettivamente le seguenti condizioni di ellitticità *degeneri*

$$(1) \qquad \begin{gathered} \lambda_h(x) |\xi|^2 \leq (a_h(x) \cdot \xi, \xi) \leq L\lambda_h(x) |\xi|^2, \\ (a_h(x) \cdot \xi, \eta) \leq M(a_h(x) \cdot \xi, \xi)^{1/2} (a_h(x) \cdot \eta, \eta)^{1/2} \end{gathered}$$

oppure

$$(2) \qquad \begin{gathered} \lambda_h(x) |\xi|^2 \leq (a_h(x, t) \cdot \xi, \xi) \leq L\lambda_h(x) |\xi|^2, \\ (a_h(x, t) \cdot \xi, \eta) \leq M(a_h(x, t) \cdot \xi, \xi)^{1/2} (a_h(x, t) \cdot \eta, \eta)^{1/2} \end{gathered}$$

per ogni $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, per ogni $h \in \mathbb{N}$, per quasi ogni $x \in \Omega$ oppure rispettivamente per quasi ogni $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$, per opportune costanti L, M e funzioni *peso* λ_h, cioè funzioni non negative, localmente sommabili e che possono *degenerare* a zero o ad infinito su insiemi di misura nulla. Il problema che ci poniamo è di studiare la compattezza rispetto alla G-convergenza delle successioni di problemi (E_h) e (P_h), cioè di vedere sotto quali ipotesi sulle funzioni peso λ_h ($h \in \mathbb{N}$) le soluzioni u_h dei problemi (E_h) (o dei problemi (P_h)) convergono, in un opportuno spazio funzionale, ad una funzione u_∞ soluzione di un problema ellittico (E_∞) (rispettivamente di un problema parabolico (P_∞)) in forma di divergenza per un'opportuna matrice $a_\infty(x)$ (rispettivamente $a_\infty(x, t)$) verificante le condizioni (1) (rispettivamente le condizioni (2)) per un'opportuna funzione peso limite λ_∞.

La nozione di G-convergenza viene introdotta da S. Spagnolo in un lavoro del 1968 (si veda [8]) per una successione di problemi (E_h) e (P_h) con matrici dei coefficienti $(a_h)_h$ simmetriche, indipendenti dal tempo e verificanti un'ipotesi di *uniforme ellitticità*, cioè esistono due costanti positive λ_0, Λ_0, tali che vale (1) con

$$(3) \qquad \lambda_0 \leq \lambda_h(x) \leq \Lambda_0 \qquad \text{e} \qquad a_{h,ij} = a_{h,ji}$$

per quasi ogni $x \in \Omega$. In tale lavoro viene provata la compattezza rispetto alla G-convergenza delle successioni di tali problemi.

Nel 1973 E. De Giorgi e S. Spagnolo in [4] danno anche una formula di rappresentazione per il G-limite nel caso dell'omogeneizzazione di problemi (E_h), cioè danno una formula di rappresentazione di a_∞ nel caso in cui le matrici a_h siano della forma

$$a_h(x) = a(hx), \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ h \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

con $a(x) = [a_{ij}(x)]_{i,j=1}^n$ matrice simmetrica e uniformemente ellittica di funzioni $a_{ij}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 1-periodiche $(i, j = 1, \dots n)$ su $\mathbb{R}^n$.

Successivamente questo tipo di problemi furono ampiamente studiati, anche in connessione con la Γ-convergenza, (si veda [2] e i riferimenti bibliografici ivi contenuti) estendendo questi primi risultati al caso non simmmetrico, al caso non lineare, fino ad arrivare al caso degenere. I maggiori contributi, oltre alla scuola italiana, sono sicuramente dovuti alla scuola francese (si vedano, a titolo di esempio [1], [5]), ed anche alla scuola russa.

Nella tesi sono contenuti risultati sia per operatori ellittici che per parabolici degeneri, anche se i risultati nuovi sono solo quelli riguardanti questi ultimi, operatori con una particolare tipo di degeneranza, quella soddisfacente la condizione di Muckenhuopt. Una funzione λ si dice appartenere alla classe di Muckenhuopt $A_p(K)$ $(p > 1,\ K \geq 1)$ se $\lambda > 0$ q.o., $\lambda, \lambda^{-\frac{1}{p-1}} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e infine

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \lambda dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \lambda^{-\frac{1}{p-1}} dx\right)^{p-1} \leq K \tag{A_p}$$

per ogni cubo Q di $\mathbb{R}^n$. Per quanto riguarda il caso ellittico (si veda [3]) si è studiato il problema quando le matrici soddisfano le condizioni (1) con la richiesta

$$(\lambda_h)_h \subseteq A_2(K)$$

sui pesi, mentre nel caso parabolico (si veda [6]) quando le matrici soddisfano le condizioni (2) con i pesi tali che

$$(\lambda_h)_h \subseteq A_{1+2/n}(K) \quad \text{per } n \geq 2 \qquad \text{e} \qquad (\lambda_h)_h \subseteq A_2(K) \quad \text{per } n = 1\,.$$

Si è affrontato anche il caso dell'omogeneizzazione in una situazione più generale (si veda [7]), cioè per equazioni del tipo

$$\begin{cases} \mu_h \dfrac{\partial v}{\partial t} - \operatorname{div}(a_h \cdot Dv) = f & \text{su } \Omega \times (0, T) \\ v = 0 & \text{su } (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times (0, T)), \end{cases}$$

dove

$$\mu_h(x) = \mu(h^\gamma x) \qquad \text{e} \qquad a_{h,ij}(x, t) = a_{ij}(h^\gamma x, h^\beta t), \qquad (\gamma, \beta \geq 0)$$

dove il peso μ è una funzione periodica su $\mathbb{R}^n$ e i coefficienti a_{ij} sono funzioni periodiche su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ localmente sommabili per i quali esiste un peso λ e delle costanti

$L, M, K_1 \geqslant 1,\ K_2 > 0,\ r > 1$ e $\alpha \in [0, 1)$ tali che

$$\lambda(x)\,|\xi|^2 \leqslant (a(x, t)\cdot\xi, \xi) \leqslant L\lambda(x)\,|\xi|^2,$$

$$(a(x, t)\cdot\xi, \eta) \leqslant M(a(x, t)\cdot\xi, \xi)^{1/2}(a(x, t)\cdot\eta, \eta)^{1/2}$$

per ogni $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, per quasi ogni $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$,

$$(5) \qquad \lambda \in A_2(K_1) \qquad \text{e} \qquad |Q|^{\frac{\alpha r}{n}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \mu^r\,dx\right)^{1/2}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \lambda^{-r}\,dx\right)^{1/2} \leqslant K_2$$

per ogni cubo $Q \subseteq Q_0$ dove Q_0 è un cubo fissato.

La condizione (5) può essere indebolita ponendo $r = 1$, a patto che il peso μ soddisfi un'ulteriore condizione, la proprietà *reverse doubling*, cioè che verifichi:

$$\text{esistono } \delta, \varepsilon \in (0, 1) \text{ tali che } \mu(\delta Q) \leqslant \varepsilon\mu(Q) \qquad \text{per ogni cubo } Q\,.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] A. BENSOUSSAN, J. L. LIONS and G. PAPANICOLAOU, *Asymptotic analysis for periodic structures*, North-Holland, Amsterdam (1978).

[2] G. DAL MASO, *An introduction to Γ-convergence*, Birkhäuser (1993).

[3] R. DE ARCANGELIS and F. SERRA CASSANO, *On the convergence of solutions of degenerate elliptic equations in divergence form*, Ann. Mat. Pura Appl., **167 (IV)** (1994), 1-23.

[4] E. DE GIORGI and S. SPAGNOLO, *Sulla convergenza degli integrali dell'energia per operatori ellittici del secondo ordine*, Boll. Un. Mat. Ital., 8 (4) (1973), 391-411.

[5] F. MURAT and L. TARTAR, *H-Convergence, in Topics in the Mathematical Modelling of Composite Materials*, Birkhäuser, Boston (1997).

[6] F. PARONETTO and F. SERRA CASSANO, *On the convergence of a class of degenerate parabolic equations*, J. Math. Pur. Appl., 77 (1998), 735-759.

[7] F. PARONETTO, *Homogenization of a class of degenerate parabolic equations*, inviato ad Asymptotic Analysis.

[8] S. SPAGNOLO, *Sulla convergenza di soluzioni di equazioni paraboliche ed ellittiche*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., **22 (III)** (1968), 571–597.

Dipartimento di Matematica, Università di Trento
e-mail: paronett130science.unitn.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Trento) - Ciclo VIII
Direttore di ricerca: Prof. Francesco Serra Cassano, Università di Trento