Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Paolo Salani

Equazioni hessiane e k-convessità

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1999), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 131–134.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_1S_131_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 2-A Suppl. (1999), pag. 131-134

Equazioni hessiane e k-convessità.

PAOLO SALANI

La tesi ha per oggetto una classe di equazioni ellittiche completamente non-lineari, le equazioni Hessiane, ed alcuni aspetti geometrici ad esse collegati. I risultati originali ottenuti riguardano principalmente la risolubilità non classica del problema di Dirichlet per le suddette equazioni e sono in gran parte riportati nelle pubblicazioni [2], [3], [6].

Per equazione Hessiana si intende un'equazione alle derivate parziali del tipo

$$S_k(D^2u) = \psi \quad \text{in } \Omega\,, \tag{1}$$

dove Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$, $u \in C^2(\Omega)$, $\psi \in C(\Omega)$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ e

$$S_k(D^2u) = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k}$$

è la k-sima funzione simmetrica degli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ di D^2u, matrice Hessiana di u.

Casi notevoli di equazioni Hessiane sono l'equazione di Poisson $\Delta u = \psi$, che si ottiene per $k = 1$, e l'equazione di Monge-Ampère $det(u_{ij}) = \psi$, corrispondente al caso $k = n$. Eccettuato il caso $k = 1$, $S_k(D^2u)$ è un operatore non-lineare; l'equazione di Poisson è quindi poco rappresentativa dell'intera classe.

Osserviamo anche che $S_1(D^2u)$ è un operatore ellittico per $u \in C^2(\Omega)$ ed è non-negativo se ristretto alla classe delle funzioni subarmoniche. Se invece $k > 1$, $S_k(D^2u)$ non è in generale ellittico né tantomeno non-negativo, a meno che non si restringa la sua azione ad una opportuna classe di funzioni. Per $k = n$, cioè per l'operatore di Monge-Ampère, tale classe è costituita dalle funzioni convesse. Nel caso generale, $k \in \{1, \ldots, n\}$, la classe corrispondente è quella delle funzioni *k-convesse*: $\Phi_k^2(\Omega) = \{u \in C^2(\Omega) \,|\, S_i(D^2u) \ge 0 \text{ in } \Omega,\ i = 1, \ldots, k\}$.

La nozione di k-convessità estende dunque ad un tempo, nel caso di funzioni regolari, quella di subarmonicità e quella di convessità.

Intrinsecamente collegati alle funzioni k-convesse ed alle equazioni Hessiane sono gli insiemi k-convessi. Fissato $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ con frontiera di classe C^2, si dice *k-convesso* se per ogni $x \in \partial\Omega$ e per $i = 1, \ldots, k$, si ha $S_i(\kappa_1(x), \ldots, \kappa_{n-1}(x)) \ge 0$, dove $\kappa_1(x), \ldots, \kappa_{n-1}(x)$ sono le curvature principali di $\partial\Omega$ nel punto x. Insiemi di livello di valori regolari di una funzione k-convessa sono $(k-1)$-convessi. Per questo i domini $(k-1)$-convessi risultano essere i domini adeguati per la risoluzione del problema di Dirichlet per le equazioni del tipo (1). Si noti che un insieme è $(n-1)$-convesso se e solo se è convesso.

In letteratura i risultati principali sulle equazioni Hessiane sono stati ottenuti da Caffarelli, Nirenberg e Spruck in [1] per il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} S_k(D^2u) = \psi > 0 & \text{in } \Omega\,, \\ u = h & \text{su } \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{2}$$

con dati ψ, h e $\partial\Omega$ di classe C^∞. In [1] gli autori individuano la classe delle funzioni k-convesse che rendono ellittico l'operatore S_k e, sotto opportune ipotesi sulla geometria del dominio Ω, dimostrano, utilizzando il metodo di continuità, che esiste in $C^\infty(\overline{\Omega})$ una ed una sola soluzione k-convessa di (2). La condizione sul dominio introdotta in [1] sostanzialmente richiede che Ω sia $(k-1)$-convesso. Gli stessi autori dimostrano che tale condizione è necessaria nel caso in cui ϕ sia costante.

Fra gli altri autori che si sono occupati di equazioni Hessiane ricordiamo B. Guan, K. Tso, J. Urbas, X. J. Wang, N. S. Trudinger, N. M. Ivochkina.

1. – Soluzioni viscose.

Il concetto di soluzione viscosa si basa, essenzialmente, sul principio del massimo ed è stato introdotto, per le equazioni ellittiche del secondo ordine, da P. L. Lions. Nella tesi si definiscono le funzioni k-convesse in senso viscoso e si sviluppa la teoria standard della viscosità per le equazioni Hessiane, mostrando che l'esistenza di una sottosoluzione u_* e di una soprasoluzione u^* di (2), con $u_* \leqslant u^*$, garantisce l'esistenza di una e una sola soluzione u tale che $u_* \leqslant u \leqslant u^*$ che risulta k-convessa in senso viscoso. In questo contesto soluzione, soprasoluzione e sottosoluzione sono sempre intese in senso vsicoso.

Trovare una soprasoluzione di (2) è semplice: ogni soluzione (classica o viscosa) di $\Delta u = 0$ in Ω, $u = h$ su $\partial\Omega$, lo è. In particolare, se $h \equiv 0$, abbiamo sempre la soprasoluzione nulla, ovvero $u^* \equiv 0$ in Ω.

La ricerca di una sottosoluzione è invece compito più difficile e la speranza di successo è strettamente legata alla geometria del dominio Ω. Nella tesi si affronta prima il caso in cui il dominio Ω sia strettamente convesso, dimostrando, che se $\psi \in C(\Omega) \cap L^{n/k}(\Omega)$, $\psi \geqslant 0$ in Ω e $h \in C(\partial\Omega)$, allora esiste una sottosoluzione (e quindi anche una soluzione) convessa di (3). Ma i domini convessi sono una restrizione troppo forte per il problema (2) quando $k < n$. Si introduce dunque una definizione di dominio k-convesso (in senso viscoso) che non richiede alcuna regolarità e che estende quella data per insiemi di classe C^2.

Sia Γ_k il cono convesso di $\mathbb{R}^n$, con vertice nell'origine e contenente il cono positivo, costituito dai vettori $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ tali che $S_i(\gamma) > 0$ per $i = 1, \ldots, k$. Per $x \in \partial\Omega$, con $J^-(\Omega, x)$ si indica l'insieme delle n-ple $(\kappa_1, \ldots, \kappa_n)$ che sono curvature principali in x di un insieme liscio che tocca Ω in x da fuori. Sia $k \in \{1, \ldots, n-1\}$; un insieme aperto, limitato e connesso $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice *k-convesso* in senso viscoso se $J^-(\Omega, x) \cap \overline{\Gamma}_k \neq \emptyset$ per ogni $x \in \partial\Omega$. Si dimostra il seguente:

TEOREMA 1. – *Sia $k \in \{1, \ldots, n\}$ e sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, limitato e uniformemente $(k-1)$-convesso (in senso viscoso). Assumiamo che, per un opportuno $R > 0$ e per ogni $x_0 \in \partial\Omega$, esista $(\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1}) \in J^-(\Omega, x_0) \cap \overline{\Gamma}_{k-1}$ tale che $(\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1}, R) \in \overline{\Gamma}_k$. Se $\psi \in C(\overline{\Omega})$ è una funzione limitata non-*

negativa, allora esiste un'unica soluzione $u \in C(\overline{\Omega})$ *del problema* (2) *con* $h \equiv 0$. *Inoltre tale soluzione è k-convessa.*

2. – Misure Hessiane e soluzioni generalizzate.

Nel caso $k = n$ le proprietà geometriche elementari delle funzioni convesse permettono di dare un senso all'equazione di Monge-Ampère anche per funzioni non-regolari tramite la nozione di soluzione generalizzata dell'equazione di Monge-Ampère. Tale nozione, introdotta da Aleksandrov e Bakelmann, è basata sul fatto che, se $u \in C^2(\Omega)$ e η è un boreliano di Ω, allora $\int_\eta det(u_{ij})$ coincide con la misura dell'immagine di η tramite la mappa del gradiente di u, ossia dell'insieme $\{Du(x) \mid x \in \eta\}$. Nella tesi si dimostra l'esistenza di misure che generalizzano la misura della mappa del gradiente, per funzioni semiconvesse. Ricordiamo che una funzione u si dice *semiconvessa* in un insieme Ω se esiste $c > 0$ tale che $u(x) + c\|x\|^2/2$ è convessa in Ω; la costante c è detta *modulo di semiconvessità* di u. Per le funzioni semiconvesse è ben definito il subgradiente, indicato, come per le funzioni convesse, con il simbolo ∂u.

TEOREMA 2. – *Sia* Ω *un sottoinsieme aperto convesso di* $\mathbb{R}^n$ *e sia* u *una funzione lipschitziana e semiconvessa in* Ω, *con modulo di semiconvessità* $c \geq 0$. *Allora, per ogni* η *sottoinsieme boreliano di* Ω *e per ogni* $\varrho \in [0, 1/c)$, *l'insieme* $P_\varrho(u; \eta) = \{x + \varrho v : x \in \Omega,\ \ v \in \partial u(x)\}$ *è misurabile secondo Lebesgue. Inoltre esistono* $n + 1$ *misure di Borel (non necessariamente non-negative)* $\sigma_i(u; \cdot)$, $i = 0, \ldots, n$, *tali che:*

$$|P_\varrho(u; \eta)| = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{i} \sigma_j(u; \eta)\, \varrho^j,$$

per ogni $\varrho \in [0, 1/c]$ *e per ogni* η *sottoinsieme boreliano di* Ω.

Questo risultato permette di definire la nozione di soluzione generalizzata di un'equazione Hessiana: una funzione semiconvessa u definita nell'aperto convesso Ω si dice *soluzione generalizzata di* (1) con $\psi \in L^1_{loc}(\Omega)$ se vale $\binom{n}{k} \sigma_k(u; \eta) = \int_\eta \psi(x)dx$ per ogni boreliano η tale che $\overline{\eta} \subseteq \Omega$.

Si confrontano poi le soluzioni generalizzate così definite con un'altro tipo di soluzioni deboli, le «good solutions», studiate da Trudinger in [6] e definite come limite uniforme di soluzioni classiche di problemi approssimanti quello in esame, dimostrando che una «good solution» semiconvessa di (2) è anche soluzione generalizzata dello stesso problema.

3. – Soluzioni esplosive.

Nella tesi si considera infine la seguente formulazione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} S_k(D^2 u) = g(x, u) & \text{in } \Omega\,, \\ u \to +\infty & \text{per } d(x, \partial\Omega) \to 0\,, \end{cases} \tag{3}$$

le cui soluzioni sono usualmente dette *soluzioni esplosive* o di *blow-up*. Si dimostrano quindi l'esistenza e l'unicità di soluzioni del problema (3), in domini $(k-1)$-convessi, sotto opportune ipotesi sulla crescita di g per $u \to \infty$, generalizzando risultati noti da tempo per $k=1$ e solo recentemente ottenuti per $k=n$ da Matero [5] e Lazer e McKenna [4].

THEOREMA 3. – *Sia Ω liscio e strettamente k-convesso e assumiamo che la funzione g soddisfi le condizioni*

(G1) $g_t \geq 0$ *in* $\overline{\Omega} \times [0, \infty)$ *ed esistono due funzioni* $h \in C^\infty(\overline{\Omega})$ *e* $f \in C^\infty(0, \infty)$, *tali che* $\lim_{t \to \infty} \frac{g(x, t)}{f(t)} = h(x)$ *uniformemente in* Ω *e* $c_1 f(t) \leq g(x, t) \leq c_2 f(t)$ *in* $\Omega \times [0, \infty)$, *dove* c_1 *e* c_2 *sono due costanti positive;*

(F1) $f(t) > 0$, $f'(t) \geq 0$ *per* $t > 0$, $f(0) = 0$ *e* f *è non-limitata;*

(F2) *la funzione* $\psi_k(t) = \int_t^\infty [(k+1)F(s, t)]^{-1/(k+1)} ds$ *è ben definita per ogni* $t > 0$, *dove* $F(s, t) = \int_t^s f(\tau)\, d\tau$.

Allora esiste almeno una soluzione viscosa k-convessa di (3).

Si dimostra inoltre che l'ipotesi (F2) sulla crescita di f per $t \to \infty$ è «quasi» necessaria per la risoluzione del problema (3).

Riguardo all'unicità della soluzione si dimostra il seguente risultato:

TEOREMA 4. – *Sia Ω un aperto stellato (rispetto ad un punto $x_0 \in \Omega$) ed assumiamo che g soddisfi* (G1) *e la seguente proprietà:*

(G2) *esiste* $\gamma > k$ *tale che* $g(x, \beta t) \leq \beta^\gamma g(x, t)$ *per ogni* $\beta \in (0, 1)$ *e* $t > 0$.

Allora (3) *ha al più una soluzione k-convessa (viscosa o classica).*

BIBLIOGRAFIA

[1] CAFFARELLI L., NIRENBERG L., SPRUCK J., *The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations, III: functions of the eigenvalues of the Hessian*, Acta Math., **155** (1985), 261-301.

[2] COLESANTI A., SALANI P. *Generalized solutions of Hessian equations*, Bull. Australian Math. Soc., **56** (1997) 459-466.

[3] COLESANTI A., SALANI P. *Hessian equations in non-smooth domains*, Nonlinear Analysis (1997) *di prossima pubblicazione.*

[4] LAZER A.C., MCKENNA P.J. *On singular boundary value problems for the Monge-Ampère operator*, J. Math. Anal. Appl., **197** (1996), 341-362.

[5] MATERO J. *The Bieberbach-Rademacher problem for the Monge-Ampère operator*, Manuscripta Math., **91** (1996), 379-391.

[6] SALANI P. *Boundary blow-up problems for Hessian equations*, Manuscripta Math., **96** (1998), 281-294.

[7] TRUDINGER N. S. *Weak solutions of Hessian equations*, Comm. Partial Diff. Eqns. *di prossima pubblicazione* (1997).

Dipartimento di Matematica «U. Dini», Università di Firenze
e-mail: salani@udini.math.unifi.it; p.salani@ao-meyer.toscana.it
Dottorato di Ricerca in Matematica (sede amministrativa: Firenze) - Ciclo IX
Direttore di Ricerca: Prof. Stefano Campi, Università di Modena