Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Giulia Sargenti

Regolarità delle soluzioni di alcune equazioni paraboliche non lineari

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1999), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 135–138.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_1S_135_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 2-A Suppl. (1999), pag. 135-138

Regolarità delle soluzioni di alcune equazioni paraboliche non lineari.

GIULIA SARGENTI

1. – Introduzione.

Lo studio delle equazioni paraboliche singolari e degeneri ha avuto un forte impulso a partire dai primi anni '80. L'interesse per questa classe di equazioni – oltre che matematico – era anche fisico in relazione alla possibilità di descrivere alcuni fenomeni diffusivi con cambiamento di fase quali – ad esempio – il problema di Stefan e l'equazione dei mezzi porosi. Un modello generale di tali equazioni è il seguente: sia Ω un aperto limitato contenuto in $\mathbf{R}^N$, $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$ un cilindro parabolico contenuto in $\mathbf{R}^{N+1}$, $a = (a_1, \ldots, a_N)$ e $b = (b_1, \ldots, b_N)$ funzioni misurabili definite in $\Omega_T \times \mathbf{R}^{N+1}$ soddisfacenti per q. o. $(x, t) \in \Omega_T$ le seguenti condizioni

$$\left\{\begin{array}{l} a(x, t, u, D_x u) \cdot D_x u \geqslant C_o\, |D_x u|^p - \varphi_o(x, t) \\ |a(x, t, u, D_x u)| \leqslant C_1\, |D_x u|^{p-1} + \varphi_1(x, t) \\ |b(x, t, u, D_x u)| \leqslant C_2\, |D_x u|^{p-1} + \varphi_2(x, t) \end{array}\right. \tag{1}$$

dove C_o, C_1, C_2 sono costanti positive e φ_o, φ_1, φ_2 sono funzioni non negative, misurabili e opportunamente sommabili. Consideriamo il problema

$$\left\{\begin{array}{l} (\beta(u))_t = \operatorname{div}(a(x, t, u, D_x u)) + b(x, t, u, D_x u) \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega_T) \\ u \in L^p_{\mathrm{loc}}(0, T; W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)). \end{array}\right. \tag{2}$$

con $\beta(\cdot)$ grafico monotono massimale non decrescente definito in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Fra i risultati più brillanti relativi alla regolarità delle soluzioni deboli del problema (1) (2) citiamo la continuità dimostrata da Di Benedetto in [2] solo nel caso $p = 2$ e con il grafico $\beta(\cdot)$ caratterizzato da una discontinuità di prima specie localizzata nell'origine ed affine altrove. Solo nel '95, in [3], la regolarità è stata estesa al caso in cui $\beta(\cdot)$ fosse singolare in più punti ma con la notevole semplificazione tecnica $a = (a_1, \ldots, a_N) = D_x u$, $b = (b_1, \ldots, b_N) \equiv 0$. In questa tesi studiamo dei problemi parabolici non lineari che generalizzano gli esempi citati. Inizialmente presentiamo un problema del tipo (1) (2) formulando – sulla scia di [3] – ipotesi più generali sul grafico $\beta(\cdot)$; al di là dell'interesse puramente matematico c'è anche la possibilità di poter ampliare la gamma dei fenomeni fisici descrivibili: il problema della transizione multipla di fase o il modello Buckley–Leverett del flusso poroso di due sostanze immiscibili e incomprimibili ne costituiscono un esempio. Successivamente affrontiamo il caso in cui la parte principale delle equazioni studiate – pur rimanendo in forma di divergenza – non esibisce più una crescita standard, come quella descritta in (1), rispetto il gradiente $|D_x u|$.

2. – I problemi studiati e i risultati ottenuti.

D'ora in poi assumeremo sempre che il grafico monotono non decrescente $\beta(\cdot)$, definito in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, soddisfi le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} w_i \subset \beta(s_i), \quad w_1 - w_2 \geqslant c_0(s_1 - s_2) \quad \forall s_i \in \mathbf{R},\ i = 1, 2 \\ c_o \text{ costante positiva fissata;} \\ \text{per ogni } \mathrm{M} > 0 \quad \sup\limits_{|\mathrm{s}| \leqslant \mathrm{M}} \ \sup\limits_{\mathrm{w} \subset \beta(\mathrm{s})} |\mathrm{w}| < \infty . \end{cases} \tag{3}$$

Sostanzialmente ammettiamo che in ogni intervallo finito $(-M, M)$ il grafico $\beta(\cdot)$ possa avere una o più discontinuità di salto e che in alcuni punti possa esibire una crescita verticale di tipo esponenziale. Possiamo inoltre supporre, e lo faremo per motivi tecnici, che le soluzioni deboli dei problemi che presenteremo siano «sufficientemente regolari» ovvero che siano essenzialmente limitate in Ω_T e che siano il limite – in topologie deboli opportune – di soluzioni regolari di problemi parabolici approssimanti quelli assegnati ottenuti in corrispondenza di grafici $\beta(\cdot)$ regolari: tale ipotesi non è restrittiva e può essere formulata grazie ai teoremi di esistenza. Consideriamo il problema (1)-(3); nel caso in cui

$$\begin{cases} a(x, t, u, D_x u) = |D_x u|^{p-2} D_x u, \quad p > 2 \\ b(x, t, u, D_x u) \equiv 0 \end{cases} \tag{4}$$

dimostriamo – estendendo la tecnica introdotta in [3] – il seguente risultato.

TEOREMA 2.1. – *Sia u una soluzione debole essenzialmente limitata del problema* (2)-(4). *Allora u è continua in Ω_T. Inoltre, per ogni compatto $Q \subseteq \Omega_T$, possiamo determinare a priori – in dipendenza solo dei dati del problema e della distanza di Q dalla frontiera parabolica di Ω_T – il modulo di continuità.*

Nel caso più generale (1)-(3), il teorema continua a sussistere quando $N \leqslant p$ mentre, se $N > p$, abbiamo solo la regolarità parziale delle soluzioni. Tuttavia, il risultato di regolarità parziale ottenuto è molto fine, trattandosi di una stima – in termini dei dati del problema – di tutte le misure esterne di Hausdorff (di ordine $N - p$) dell'insieme singolare delle soluzioni cioè dell'insieme

$$\Sigma = \{\bar{x} \in \mathcal{K} : \exists \bar{t} \in (0, T) \text{ tale che } (\bar{x}, \bar{t}) \text{ è un punto di discontinuità di } u\}$$

$\mathcal{K}$ sottoinsieme compatto di Ω. La differenza tra i due risultati ottenuti è spiegabile accennando euristicamente alla dimostrazione. Una soluzione debole del nostro problema è continua in un fissato punto $(x_o, t_o) \in \Omega_T$ se esiste una famiglia di intorni, con centro in (x_o, t_o), in corrispondenza dei quali l'oscillazione essenziale di u decresce a zero al decrescere del diametro di tali intorni. La situazione più favorevole che puó verificarsi è quella in cui la misura degli insiemi di positività delle funzioni troncate $(u-k)_\pm$, $k \in \mathbf{R}$ opportunamente scelto, puó essere «controllato» dalla misura dell'intorno prefissato; se ciò non avviene, dobbiamo distinguere due casi: il caso $N \leqslant p$ – sostanzialmente più semplice – e il caso $N > p$. Il primo caso può ricondursi alla situazione «favorevole» appena descritta. Nel secondo caso introduciamo un problema di Dirichlet, con opportune condizioni iniziali, associato alla nostra equazione e studiamo la regolarità delle sue soluzioni. Ed è la radialità di tali soluzioni – dovuta all'indipendenza esplicita di $a(x, t, u, D_x u) = |D_x u|^{p-2} D_x u$ rispetto (x, t) – a determinare la differenza di risultato tra il caso più generale (1)-(3) e quello più semplice con il p-laplaciano. Il metodo dimostrativo descritto è estremamente duttile e ciò ci permette di sperare nella sua applicabilità anche a modelli molto diversi dal tipo finora esposto. In questa direzione abbiamo successivamente considerato due problemi «fortemente non standard». Il primo nasce sulla scia di alcuni lavori che sono stati sviluppati solo in campo ellittico e variazionale [5]; introduciamo la funzione $F : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$, $(\eta, z) \mapsto F(\eta, z)$ e, per ogni $\eta \in \mathbf{R}$ e per ogni $z \in \mathbf{R}^N$, assumiamo che sia limitata quando $|z| \leqslant 1$ mentre, se $|z| > 1$, supponiamo che per q. o. $(x, t) \in \Omega_T$

$$C_1 |z|^{q-2} \leqslant F(\eta, z), \qquad |F(\eta, z)| \leqslant C_2 |z|^{p-2}, \tag{5}$$

con $p > q > 2$ e $C_1 \leqslant C_2$ costanti positive. Anche per le soluzioni del problema (3) (5) (6)

$$\begin{cases} (\beta(u))_t = \operatorname{div}(F(u, D_x u) D_x u) & \text{in } \mathcal{D}'(\Omega_T) \\ u \in L^q_{\text{loc}}(0, T; W^{1,q}_{\text{loc}}(\Omega)) \\ F(u, D_x u) D_x u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega_T) \end{cases} \tag{6}$$

sussiste l'analogo del teorema 1. L'applicazione del metodo precedentemente descritto risulta tecnicamente difficile nella parte iniziale (corrispondente ora al caso $N \leqslant q$), non solo per la minima regolarità richiesta alle soluzioni del problema e alla parte principale dell'equazione, ma principalmente per la crescita p-q esibita dalla funzione $(\eta, z) \mapsto F(\eta, z)$. In tal senso è necessario supporre che tale funzione sia ulteriormente regolare, più precisamente che sia continua in η, uniformemente continua in z: ció ci permette di «stabilizzare» localmente la sua crescita. Passiamo ora all'ultimo modello presentato nella tesi il quale descrive un processo diffusivo caratterizzato da una coercitività anisotropa. Introdotti gli spazi di Sobolev non isotropi $L^{p_i}(0, T; W^{1, p_i}(\Omega))$ formati dalle funzioni $v \in L^{(\min_i p_i)}(\Omega_T)$ con derivata debole $D_{x_i} v \in L^{p_i}(\Omega_T)$ per ogni $i = 1, \ldots, N$, consideriamo il problema (3) (7)

$$(7) \quad \begin{cases} (\beta(u))_t = \sum_{i=1}^{N} D_{x_i}(|D_{x_i} u|^{p_i - 2} D_{x_i} u) & \text{in } \mathcal{D}(\Omega_T) \quad p_i > 2 \ \forall i = 1, \ldots, N \\ u \in L^{p_i}_{\mathrm{loc}}(0, T; W^{1, p_i}_{\mathrm{loc}}(\Omega)). \end{cases}$$

C'è una vasta letteratura relativa al caso stazionario mentre solo recentemente in [6] – riprendendo il modello descritto in [1] – è stato dimostrato un risultato di regolarità globale L^∞ per un'equazione parabolica simile alla nostra ma con $\beta(u) = u$. Indipendentemente dalla bibliografia citata e prendendo spunto dalla tecnica usata in [4], abbiamo inizialmente stabilito una stima L^∞_{loc} per le soluzioni del problema (3) (7); in seguito abbiamo dimostrato la continuità delle soluzioni, determinando – anche in questo caso – il modulo di continuità a priori. Il metodo dimostrativo applicato ai problemi (2)-(4), (3) (5) (6), è stato sostanzialmente modificato essendo ora reso in parte inefficace dalla non isotropia degli spazi $L^{p_i}(0, T; W^{i, p_i}(\Omega))$. Osserviamo che – scelta una geometria appropriata per la famiglia di intorni centrati in un fissato punto $(x_o, t_o) \in \Omega_T$ – nel caso in cui la misura degli insiemi di positività delle funzioni troncate $(u - k)_\pm$, $k \in \mathbf{R}$, sia «controllata» dalla misura di tali intorni, la soluzione è continua e il modulo di continuità è hölderiano. Se ciò non accade, introdotto subito un problema di Dirichlet con opportune condizioni iniziali associato alla nostra equazione, stabiliamo la regolarità delle sue soluzioni sfruttando un teorema di immersione degli spazi $L^{p_i}(0, T; W^{1, p_i}(\Omega))$ in certi spazi di Lebesgue (dimostrato in [6]) insieme ad una disuguaglianza iterativa dimostrata da Stampacchia.

BIBLIOGRAFIA

[1] L. Boccardo, P. Marcellini, C. Sbordone, *L^∞ regularity for variational problems with sharp non standard growth conditions*, Boll. UMI, **7**, **4-A** (1990), 219-225.

[2] E. Di Benedetto, *Continuity of weak solutions to certain singular parabolic equations*, Ann. Mat. Pura Appl., **130** (1982), 131-176.

[3] E. Di Benedetto, V. Vespri, *On the singular equation $(\beta(u))_t = \Delta u$*, Arch. Rat. Mech. Anal., **132** (1995), 247-309.

[4] N. Fusco, C. Sbordone, *Some remarks on the regularity of minima of anisotropic integrals*, Comm. Partial Differential Equations, **18** (1993), 153-167.

[5] P. Marcellini, *Regularity of minimizers of integrals of the calculus of variations with non standard growth conditions*, Arch. Rat. Mech. Anal., **105** (1989), 267-284.

[6] M.M. Porzio, *L^∞-Regularity for degenerate and singular anisotropic parabolic equations*, Boll. U.M.I., **3**, **9-A** (1997), 697-707.

Dipartimento di Matematica «G. Castelnuovo», Università di Roma «La Sapienza»
e–mail: sargenti@mat.uniroma1.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Roma «La Sapienza») - Ciclo IX
Direttore di ricerca: Prof. V. Vespri, Università di Firenze