Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Giovanni Stegel

Algebre induttive massimali delle rappresentazioni sferiche del gruppo degli automorfismi di un albero omogeneo

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1999), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 143–146.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_1S_143_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 2-A Suppl. (1999), pag. 143-146

Algebre induttive massimali delle rappresentazioni sferiche del gruppo degli automorfismi di un albero omogeneo.

GIOVANNI STEGEL

1. – Introduzione. Concetto di algebra induttiva.

DEFINIZIONE 1. – *Sia π una rappresentazione unitaria di un gruppo localmente compatto G su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. Una sottoalgebra commutativa $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è detta π-induttiva (o induttiva rispetto a π) quando per ogni $g \in G$, $T \in \mathcal{A}$ risulta*

$$\pi(g) T \pi(g^{-1}) \in \mathcal{A}.$$

Un'algebra π–induttiva è detta massimale (AIM) *se non è contenuta strettamente in un'altra algebra induttiva relativa a π.*

Il concetto di AIM generalizza quello di *sistema di imprimitività*, introdotto da Mackey. Si può dimostrare che ogni AIM autoaggiunta è un sistema di imprimitività; in questo caso, per il Teorema di imprimitività di Mackey ([5]), π è equivalente a una rappresentazione su uno spazio di Hilbert di funzioni definite su un G-spazio.

La classificazione delle AIM sembra quindi utile per lo studio delle realizzazioni di rappresentazioni di gruppi su diversi spazi di Hilbert di funzioni (cfr. [2] per il caso di un gruppo libero); questo metodo, proposto da Tim Steger, è stato applicato da M.K. Vemuri ([1]) alle rappresentazioni del gruppo di Heisenberg su spazi L^2 ordinari.

2. – Automorfismi di alberi.

La tesi qui riassunta ha come scopo la classificazione delle AIM nel caso in cui:

- G è il gruppo degli automorfismi di un albero omogeneo (localmente finito), cioè delle biiezioni sull'insieme dei vertici dell'albero che conservano la distanza naturale (o, equivalentemente, portano spigoli in spigoli);
- $\mathcal{H}$ è lo spazio delle funzioni L^2 sulla *frontiera* Ω dell'albero. Quest'ultima è un G-spazio compatto, dotato di una misura di Borel normalizzata ν tale che $\nu_k(A) := \nu(k^{-1}A) = \nu(A)$ (per $A \subseteq \Omega$ misurabile) quando k appartiene al sottogruppo K_O che fissa un vertice di riferimento; si dice che ν è K_O-*invariante*;
- L'azione di G su $\mathcal{H} := L^2(\Omega, \nu)$ si ottiene componendo la rappresentazione regolare con la moltiplicazione per una derivata di Radón-Nikodým, per tener conto del fatto che ν non è invariante rispetto ad elementi generici di G. Più preci-

samente, se $f \in \mathcal{H}$, $s \in \mathbf{R}$, $g \in G$, e ν_g è definita come al punto precedente, si pone

$$(\pi_s(g) f)(\omega) := \left(\frac{d\nu_g}{d\nu}(\omega) \right)^{1/2 + is} f(g^{-1}\omega) \quad \text{per quasi ogni } \omega. \tag{1}$$

Allora tutte le applicazioni della famiglia $\{\pi_s : s \in \mathbf{R}\}$, detta *serie sferica principale*, sono rappresentazioni unitarie irriducibili.

Per maggiori dettagli su questi risultati si rinvia a [4].

Nella tesi si assume che il parametro s soddisfi la relazione

$$q^{is} \neq 1 \tag{2}$$

dove $q + 1$ (supposto ≥ 3) è il *grado* dell'albero, cioè il numero dei vicini di ciascun vertice.

3. – Risultati principali (caso generale).

Un esempio immediato di AIM relativa a tutte le rappresentazioni π_s si ottiene considerando, per ogni $\phi \in L^\infty(\Omega, \nu)$, l'*operatore di moltiplicazione* M_ϕ (cioè l'operatore $f \mapsto \phi \cdot f$ su $\mathcal{H} := L^2(\Omega, \nu)$. Infatti l'algebra

$$\mathcal{M} := \{M_\phi : \phi \in L^\infty(\Omega, \nu)\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}) \tag{3}$$

è π_s-induttiva ed è notoriamente massimale come algebra commutativa. Si può costruire facilmente un operatore unitario I_s che intreccia π_s e π_{-s}: perciò $I_s \mathcal{M} I_s^{-1}$ è anch'essa un'AIM rispetto a π_s. Si dimostra, sfruttando (1), che le due algebre sono in effetti distinte. Il risultato principale della tesi, enunciato qui di seguito, è la determinazione dei valori di s per i quali non esistono altre AIM.

TEOREMA 1. – *Se il parametro s soddisfa, oltre alla condizione* (2), *la disuguaglianza $q^{2is} \neq 1$ (cioè, di fatto, $q^{is} \neq -1$), allora le sole AIM rispetto a π_s sono $\mathcal{M}$ e $I_s \mathcal{M} I_s^{-1}$.*

Per ottenere questo risultato si sono studiate in primo luogo le rappresentazioni di alcuni sottogruppi compatti di G (in particolare le restrizioni di π_s). In primo luogo, fissato uno spigolo $\{O, O'\}$, si sono considerati il sottogruppo

$$K := \{g \in G : g(\{O, O'\}) = \{O, O'\}\} \tag{4}$$

e il suo più semplice carattere non banale χ. È utile cercare di caratterizzare gli operatori (appartenenti a un'arbitraria AIM), che *si trasformano secondo il carattere χ quando vengono coniugati mediante gli operatori di $\pi_s|_K$*, cioè appartengono al sottospazio

$$\mathcal{E} := \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \pi_s(k)\, T \pi_s(k^{-1}) = \chi(k)\, T \quad \text{per ogni } \mathrm{k} \in \mathrm{K}\}. \tag{5}$$

Vale infatti il risultato seguente:

LEMMA 1. – (i) *Ogni AIM contiene un elemento non nullo di* $\mathcal{E}$.

(ii) *Se* $T \in \mathcal{E}$ *appartiene a qualche AIM, allora* $T \in \mathcal{M}$ *oppure* $T \in I_s \mathcal{M} I_s^{-1}$.

(iii) *Se* $\mathcal{A}$ *è un'AIM, e* $\mathcal{A} \cap (\mathcal{E} \cap \mathcal{M}) \neq \{0\}$, *allora* $\mathcal{A} = \mathcal{M}$.

Come si vede, il Teorema 1 segue immediatamente dal Lemma 1. Descriviamo qui sommariamente i metodi usati nella dimostrazione dei punti più interessanti.

Per provare il punto (i) si riduce il problema a quello dell'esistenza, in un'AIM arbitraria, di operatori non scalari invarianti rispetto al sottogruppo che fissa entrambi i vertici di uno spigolo (lo *stabilizzatore puntuale* dello spigolo). Si intende sempre che G agisca sugli operatori coniugandoli mediante gli elementi dell'immagine di π_s. È facile dimostrare un enunciato più debole, in cui si richiede l'invarianza rispetto allo stabilizzatore puntuale di sottoalberi più grandi; si procede poi induttivamente, estendendo il risultato a una certa classe di sottoalberi che contiene gli spigoli come elementi minimali.

Il punto (ii) richiede una decomposizione dello spazio $\mathcal{H}$ (o, meglio, di uno spazio L^2 relativo a una nuova misura K-invariante equivalente a ν) come somma ortogonale di sottospazi di funzioni localmente costanti su Ω. Rispetto a questa decomposizione T è rappresentato da una matrice infinita, le cui componenti si determinano abbastanza facilmente sfruttando le relazioni

$$T\pi(g)\, T\pi(g^{-1}) = \pi(g)\, T\pi(g^{-1})\, T \qquad g \in G \tag{6}$$

(che esprimono l'appartenenza di T a un'algebra induttiva) e l'irriducibilità delle sottorappresentazioni $\pi_s|_K$ relative ai vari addendi diretti.

4. – Il caso di q^{is} immaginario.

Il metodo esposto nella sezione 3 non si può applicare quando $q^{is} = -1$; vedremo ora perché, e infine come si possano comunque classificare in questo caso le AIM relative a π_s. Premettiamo una definizione, rinviando ancora a [4] per maggiori dettagli.

DEFINIZIONE 2. – *Si dice che* $g \in G$ *è pari se per un vertice* Q *dell'albero, e quindi per ogni* Q, $d(Q, gQ)$ *è un numero pari. Si indicano??? con* G_p *il sottogruppo degli automorfismi pari e con* G_d *l'insieme* $G \backslash G_p$. *Si denota infine con* $\mathcal{H}_p$ *(risp.:* $\mathcal{H}_d$*) il sottospazio generato dall'insieme*

$$\{\pi(g)\,\xi : g \in G_p \ (risp.: G_d)\}. \tag{7}$$

dove ξ *è un arbitrario vettore non nullo.*

LEMMA 2. – *Se* $q^{2is} = 1$, *allora* $\mathcal{H} = \mathcal{H}_p \oplus \mathcal{H}_d$.

Si può dimostrare (cfr. [3]) che il Lemma 2 fornisce la decomposizione di $\pi_s|_{G_p}$ in componenti irriducibili; questo implica che la definizione di $\mathcal{H}_p$ e $\mathcal{H}_d$ è ben posta. Indichiamo con I_p la proiezione ortogonale sul sottospazio $\mathcal{H}_p$. Si vede immediatamente che l'operatore $S := I_p - I_d$ (introdotto in [2]) appartiene al sottospazio $\mathcal{E}$ definito in (4), ma non a $\mathcal{M}$ né a $I_s \mathcal{M} I_s^{-1}$. Perciò il Lemma 3.2 non è valido in questo caso, e la classificazione delle AIM deve procedere in modo diverso. Inoltre l'algebra

$$\mathcal{G} := \{\alpha I_p \oplus \beta I_d \colon \alpha, \beta \in \mathbf{C}\} \tag{8}$$

(che contiene S) è induttiva per definizione e quindi (per il Lemma di Zorn) è contenuta in un'AIM, a priori non unica, diversa dalle precedenti. In realtà $\mathcal{G}$ stessa è π_s-induttiva massimale; enunciamo direttamente il risultato finale, la cui dimostrazione ricalca – con maggiori complicazioni tecniche – quella del Lemma 3.2.

TEOREMA 2. – *Se il parametro s non soddisfa* (2), *allora le sole algebre* π_s-*induttive massimali sono* $\mathcal{M}$, $I_s \mathcal{M} I_s^{-1}$ *e l'algebra* $\mathcal{G}$ *definita in* (8).

5. – Osservazioni finali.

Le AIM trovate nel corso di questo lavoro sono tutte autoaggiunte, e quindi (come detto nell'introduzione) sono sistemi di imprimitività. È verosimile però che AIM non autoaggiunte si possano incontrare nello studio di altre rappresentazioni irriducibili, sferiche o no, di G. Questo confermerebbe i risultati recentemente ottenuti da Tim Steger nel caso del gruppo $SL(2, \mathbf{R})$.

BIBLIOGRAFIA

[1] VEMURI M.K., *Realizations of the Canonical Representation*, in corso di stampa.

[2] PENSAVALLE T. and STEGER T., *Tensor Products with Anisotropic Principal Series Representations of Free Groups*, Pac. J. Math. **173** (1996), 181-202.

[3] OLSHANSKIJ G.I., *Classification of Irreducible Representations of Groups of Automorphisms of Bruhat-Tits Trees*, Funct. Anal. Appl., **11** (1977), 26-34.

[4] FIGÀ-TALAMANCA A. and NEBBIA C., *Harmonic Analysis and Representation Theory for Groups Acting on Homogeneous Trees*, London Math. Soc. Lect. Note Series n. 162, Cambridge University Press, Cambridge (1990).

[5] MACKEY G. *The Theory of Unitary Group Representations*, Chicago University Press, Chicago-London (1976).

Piazza Prati degli Strozzi 35 - 00195 Roma; e-mail: stegel@mat.uniroma1.it
Dottorato in Matematica (Sede amministrativa: Università di Roma «La Sapienza») - Ciclo IX
Direttore della ricerca: Prof. Tim Steger, Università di Sassari