BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

GIUSEPPE STURIALE

Sistemi lineari iperbolici di ordine k in insiemi limitati ed in insiemi non limitati. Stabilità della controllabilità completa

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1999), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 147–150.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_1S_147_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 2-A Suppl. (1999), pag. 147-150

Sistemi lineari iperbolici di ordine k in insiemi limitati ed in insiemi non limitati. Stabilità della controllabilità completa.

GIUSEPPE STURIALE

La letteratura dedicata alla teoria dei controlli e dell'ottimizzazione per i processi descritti da sistemi lineari iperbolici con condizioni iniziali del tipo di Darboux riguarda quasi esclusivamente il caso dei sistemi del secondo ordine

$$(e) \qquad w_{xy} + A(x, y)\, w_x + B(x, y)\, w_y + C(x, y)\, w = f(x, y).$$

Tali sistemi sono, a loro volta, considerati per lo più su domini rettangolari di $\mathbf{R}^2$, ma vi è anche una serie di lavori che prendono in esame i sistemi (e) su sottoinsiemi non limitati di $\mathbf{R}^2$ del tipo

$$L(\alpha, \beta) = ([0, \alpha[\times[0, +\infty[) \cup ([0, +\infty[\times[0, \beta[),$$

$\alpha, \beta \in]0, +\infty]$. Invece, i sistemi di ordine k

$$(E) \quad \frac{\partial^k w}{\partial x_1 \ldots \partial x_k} + \sum_{\alpha \in \overline{C}(k)} A_\alpha(x_1, \ldots, x_k) \frac{\partial^{|\alpha|} w}{\partial x_\alpha} + A(x_1, \ldots, x_k)\, w = f(x_1, \ldots, x_k)$$

(dove $\overline{C}(k)$ è la famiglia dei sottoinsiemi α di $\{1, \ldots, k\}$ aventi cardinalità $|\alpha|$ minore di k) sono presi in considerazione solo in alcuni lavori ed esclusivamente su domini rettangolari di $\mathbf{R}^k$.

Nei lavori precedentemente citati le soluzioni dei sistemi vengono cercate nello spazio delle funzioni che appartengono a L^p (ovvero a L^p_{loc}, nel caso dei domini non limitati) assieme a tutte le derivate (nel senso delle distribuzioni) che servono; infatti, come è ben noto, la natura dei problemi di controllo è tale che sarebbe poco realistico limitarsi a considerare soluzioni in senso classico (funzioni continue con derivate continue). Invece, per quanto riguarda i coefficienti, le ipotesi adottate sono, solitamente, ipotesi di continuità dei coefficienti stessi e di alcune loro derivate; tali ipotesi, infatti, oltre a garantire l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema di Darboux associato al sistema, consentono di avere, mediante un adattamento del classico metodo di Riemann, una formula di rappresentazione della soluzione in funzione dei dati, tramite una matrice di evoluzione.

Ad esempio, nel caso del sistema (e) considerato nel rettangolo $\Delta =]0, a[\times]0, b[$, si ha che le ipotesi

$\alpha)$ $A, A_x, B, B_y, C \in C^0(\overline{\Delta}, \mathbf{R}^{n,n})$,
$\beta)$ $f \in L^p(\Delta, \mathbf{R}^n)$,
$\gamma)$ $\varphi \in W^{1,p}(]0, a[, \mathbf{R}^n)$, $\psi \in W^{1,p}(]0, b[, \mathbf{R}^n)$, $\varphi(0) = \psi(0)$

garantiscono che esiste una ed una sola funzione w, elemento dello spazio funzionale

$$W_p^*(\Delta, \mathbf{R}^n) = \{w \in L^p(\Delta, \mathbf{R}^n) : w_x, w_y, w_{xy} \in L^p(\Delta, \mathbf{R}^n)\},$$

che verifica la (e) q. o. in Δ e soddisfa le condizioni iniziali

$$(c) \qquad w(x, 0) = \varphi(x) \ \ \forall x \in]0, a[, \qquad w(0, y) = \psi(y) \ \ \forall y \in]0, b[$$

inoltre, tale funzione w ha, per ogni $(x, y) \in \Delta$, la seguente rappresentazione:

$$(S) \qquad w(x, y) = V(0, 0; x, y)\,\varphi(0) + \int_0^x V(\xi, 0; x, y)[\varphi'(\xi) + B(\xi, 0)\,\varphi(\xi)]\,d\xi +$$

$$+ \int_0^y V(0, \eta; x, y)[\psi'(\eta) + A(0, \eta)\,\psi(\eta)]\,d\eta + \int_0^x\int_0^y V(\xi, \eta; x, y)\,f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta$$

dove V è la funzione di Riemann associata al sistema (e). È tuttavia evidente che le α) non sono le ipotesi più naturali da adottare per i coefficienti A, B e C, compatibilmente con la richiesta che la soluzione w appartenga allo spazio $W_p^*(\Delta, \mathbf{R}^n)$. Una ricerca nella direzione di allegerire le ipotesi sui coefficienti è stata intrapresa, ad esempio, nei lavori [1], [2] e [3], nei quali sono stati studiati il Problema (e) (c) ed alcune questioni di teoria dei controlli in ipotesi più generali sui coefficienti A, B e C; anzi, le ipotesi che vengono assunte in [2] sono, in un certo senso, le più generali possibile; esse, infatti, sono condizione necessaria e sufficiente affinché l'operatore differenziale definito dal primo membro della (e) trasformi $W_p^*(\Delta, \mathbf{R}^n)$ in un sottoinsieme di $L^p(\Delta, \mathbf{R}^n)$.

È stato quindi interessante occuparsi dei sistemi di ordine k di tipo (E) sia nel caso dei domini rettangolari $\Delta =]0, c_1[\times \ldots \times]0, c_k[$ che nel caso di opportuni sottoinsiemi non limitati L di $\mathbf{R}^k$ (l'analogo k-dimensionale degli insiemi $L(\alpha, \beta)$) e poi utilizzare i risultati così ottenuti come punto di partenza ed un utile strumento per lo studio di varie questioni di teoria dei controlli e di ottimizzazione collegate con i sistemi (E) (non soltanto le analoghe di quelle già studiate nel caso $k = 2$).

Più precisamente, dopo aver illustrato alcune fondamentali proprietà dello spazio $W_p^*(\Delta, \mathbf{R}^n)$ delle soluzioni di (E) ed avere introdotto gli spazi dei coefficienti A_α (spazi con norma mista di tipo $L^{p,\infty}$), è stata dimostrata l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema di Darboux e la sua dipendenza continua dai dati (il termine noto $f \in L^p(\Delta, \mathbf{R}^n)$ ed il dato iniziale) e dai coefficienti, osservando che le ipotesi adottate su questi ultimi sono le più generali possibile (nel senso precisato in precedenza nel caso $k = 2$).

I risultati acquisiti sono stati quindi utilizzati per studiare la permanenza di un certo tipo di completa controllabilità ($\mathbf{R}^n$-completa controllabilità) rispetto ai coefficienti, pervenendo alla conclusione che essa non viene alterata da piccole perturbazioni degli stessi.

È stato, infatti, considerato il processo di controllo con parametri distribuiti descritto (in $\Delta =]0, c_1[\times \ldots \times]0, c_k[$) dal sistema lineare iperbolico

$$(E') \qquad \frac{\partial^k w}{\partial x_1 \ldots \partial x_k} + \sum_{\alpha \in \mathcal{C}(k)} A_\alpha(x_1, \ldots, x_k) \frac{\partial^{|\alpha|} w}{\partial x_\alpha} + A(x_1, \ldots, x_k)\, w =$$
$$= F(x_1, \ldots, x_k)\, U(x_1, \ldots, x_k)$$

(in cui la risposta w appartiene allo spazio $W_p^*(\Delta, \mathbf{R}^n)$, il coefficiente F è una funzione misurabile da Δ in $\mathbf{R}^{n,m}$ ed il controllo U è una funzione misurabile, da Δ in $\mathbf{R}^m$, tale che $FU \in L^p(\Delta, \mathbf{R}^n)$), assumendo come stato iniziale la traccia di w sull'unione delle facce di Δ che contengono l'origine di $\mathbf{R}^k$, elemento di un opportuno spazio di Sobolev (sostanzialmente uno spazio di tipo W_p^* con dominio $k-1$-dimensionale) e come stato finale il valore $w(c_1, \ldots, c_k) \in \mathbf{R}^n$ che la risposta prende nel punto $(c_1, \ldots, c_k)$. Denotato poi con M il complesso dei coefficienti A_α e A, con $M^p(\Delta, \mathbf{R}^{n,n})$ il relativo spazio funzionale (prodotto degli spazi $L^{p,\infty}$ a cui appartengono i coefficienti) e con $\mathcal{M}(\Delta, \mathbf{R}^{n,m})$ lo spazio delle funzioni misurabili da Δ in $\mathbf{R}^{n,m}$, munito della metrica della convergenza in misura, è stato dimostrato che l'insieme delle coppie (M, F) per le quali il corrispondente processo di controllo (E') risulta $\mathbf{R}^n$-completamente controllabile è un sottoinsieme aperto dello spazio metrico completo $M^p(\Delta, \mathbf{R}^{n,n}) \times \mathcal{M}(\Delta, \mathbf{R}^{n,m})$.

Analogamente è stato studiato il sistema (E) su sottoinsiemi non limitati di $\mathbf{R}^k$. Precisamente, posto, se $a_1, \ldots, a_k \in]0, +\infty]$,

$$L(a_1, \ldots, a_k) = \bigcup_{i=1}^{k} ([0, +\infty[\times \ldots \times [0, +\infty[\times [0, a_i[\times [0, +\infty[\times \ldots \times [0, +\infty[)$$

e, se $(x_1, \ldots, x_k) \in [0, +\infty[$,

$$l(x_1, \ldots, x_k) = \bigcup_{i=1}^{k} ([x_1, +\infty[\times \ldots \times [x_{i-1}, +\infty[\times \{x_i\} \times [x_{i+1}, +\infty[\times \ldots \times [x_k, +\infty[),$$

è stato considerato il sistema (E) su insiemi non limitati del tipo $L(a_1, \ldots, a_k)$ ed il relativo problema di Darboux con dato su $l(0, \ldots, 0)$. È stata ottenuta, anche in questo caso, l'esistenza, l'unicità e la dipendenza continua della soluzione dal complesso dati-coefficienti, avendo assunto per i coefficienti quelle che sono le ipotesi più generali possibile, compatibilmente con l'appartenenza del termine noto f a L^p_{loc} e della soluzione w a $\widetilde{W}_p^*$.

Inoltre, dopo aver introdotto per i coefficienti A_α e A un'ipotesi analoga alla α), è stata ottenuta, mediante una *matrice di evoluzione* associata ad (E), una formula risolutiva del problema di Darboux (che generalizza la (S)) sia nel caso del rettangolo Δ (in cui tale formula è già nota) che nel caso di $L(a_1, \ldots, a_k)$.

Tale matrice è stata utile nella trattazione di alcune questioni di controllabilità completa che sugli insiemi non limitati di tipo $L(a_1, \ldots, a_k)$ è di due tipi, una di tipo «esatto» ed una di tipo «approssimato». Precisamente, fissato $(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_k) \in]0, a_1[\times \ldots \times]0, a_k[$, sono stati assunti come stato iniziale e come stato finale, rispettivamente, le tracce di w su $l(0, \ldots, 0)$ e su $l(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_k)$, elementi di uno stesso spazio funzionale $\widetilde{\Xi}_p^{(n)}$ (anche questo del tipo di Sobolev). Dopo aver stabilito delle condizioni affinchè per ogni fissato stato iniziale il corrispondente insieme degli stati finali sia coincidente con lo spazio $\widetilde{\Xi}_p^{(n)}$ (problema della controllabilità completa esatta) ovvero sia un insieme ivi denso (problema della controllabilità completa approssimata), sono state utilizzate tali condizioni per studiare la permanenza dei due tipi di controllabilità completa «al crescere» dei parametri nonchè la loro stabilità rispetto a piccole perturbazioni dei coefficienti, pervenendo ad un risultato affermativo nel primo caso e ad uno negativo nel secondo.

BIBLIOGRAFIA

[1] EMMANUELE G. and VILLANI A., *A Linear Hyperbolic System and an Optimal Control Problem*, J. Optim. Theory Appl., **44** (1984), 213-229.

[2] SURYANARAYANA M. B., *Existence Theorems for Optimization Problems concerning Linear, Hyperbolic Partial Differential Equations without Convexity Conditions*, J. Optim. Theory Appl., **19** (1976), 47-61.

[3] VILLANI A., *On an Optimal Control Problem for a Distributed Parameter Control Process with Unbounded Coefficients*, J. Optim. Theory Appl., **34** (1981), 561-577.

Dipartimento di Matematica, Università di Messina
e-mail: sturiale@dipmat.unime.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Palermo) - Ciclo VIII
Direttore di ricerca: Prof. A. Villani, Università di Catania