Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Paola Trebeschi

Esistenza di soluzioni in problemi di ottimizzazione di forma e ostacoli

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1999), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 155–156.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_1S_155_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 2-A Suppl. (1999), pag. 155-156

Esistenza di soluzioni in problemi di ottimizzazione di forma e ostacoli.

PAOLA TREBESCHI

In questa tesi viene studiato il problema dell'esistenza di soluzioni ottime in certe classi di problemi di ottimizzazione di forma e ostacoli.

In generale questi problemi sono mal posti e l'esistenza di soluzioni ottime può essere ottenuta solo nel senso «rilassato». In questa tesi otteniamo invece condizioni sufficienti per l'esistenza della soluzione ottima senza usare tecniche di rilassamento.

I problemi che studiamo sono:

1. cercare risultati di continuità per l'applicazione $\Omega \to u_\Omega \in \operatorname{argmin} G(\Omega, \cdot)$, dove Ω è un sottoinsieme aperto di un insieme aperto e limitato B di $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, e G è un funzionale non lineare di forma «generale»;

2. cercare risultati di continuità e compattezza per l'applicazione $\Omega \to u_{\Omega, f, h}$, dove $u_{\Omega, f, h}$ è la soluzione di $-\Delta_p u_{\Omega, f, h} = f$ in Ω con $u - h \in H_0^{1,p}(\Omega)$, dove $1 < p < +\infty$;

3. provare l'esistenza di un minimo per il problema dell' ostacolo ottimo, cioè

$$\min \left\{ F(g) : g \in X_\psi(\Omega), \int_\Omega g \, dx = c \right\},$$

dove Ω è un insieme aperto e limitato di $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, $\psi \in H_0^{1,p}(\Omega)$ è una funzione fissata, c è una costante in $\mathbb{R}$ fissata, e

$$X_\psi(\Omega) = \{ g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}, \, g \text{ quasi u.s.c.}, g \leq \psi \}.$$

Il Problema 1. è risolto nella topologia di Hausdorff dei complementari nella classe dei domini ammissibili sotto un'ipotesi di stabilità per il dominio limite.

Il Problema 2. è risolto (vedi [1]) nella topologia di Hausdorff dei complementari sotto ulteriori vincoli di tipo capacitario nella classe dei domini ammissibili. Più precisamente, se $1 < p \leq N$, otteniamo la continuità delle soluzioni del problema di Dirichlet per il p-Laplaciano nella classe dei domini che soddisfano una condizione uniforme di tipo Wiener (vedi [4] per il caso lineare). Questa classe è compatta nella topologia di Hausdorff dei complementari e l'esistenza della soluzione ottima deriva dalla teoria delle funzioni armoniche e dalla teoria del potenziale. Come importante conseguenza di questo risultato dimostriamo la generalizzazione del risultato di Sverak (vedi [5]) in dimensione N. Più precisamente, se

$p \in]N-1, N]$, la continuità si ottiene imponendo vincoli di tipo topologico legati al numero di componenti connesse del complementare.

Il Problema 3. è risolto (vedi [2]) per problemi di ostacolo con costo monotono (vedi [3] per il caso di problemi di ottimizzazione di forma) e γ-semicontinuo inferiormente, dove la topologia γ sulla classe degli ostacoli ammissibili è associata alla Γ-convergenza dei funzionali di energia:

$$E_g(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_\Omega |Du|^p\,dx & \text{se } u \geqslant g \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

In generale la γ-convergenza non è compatta e si può ottenere solo l'esistenza di soluzioni «rilassate». In questa tesi otteniamo invece l'esistenza dell'ostacolo ottimo come caso particolare di un risultato formulato in un ambiente astratto molto generale (che non si riferisce agli ostacoli rilassati), in cui gioca un ruolo essenziale una seconda topologia, chiamata $w\gamma$, che risulta γ-compatta e che consente di recuperare l'esistenza della soluzione ottima.

BIBLIOGRAFIA

[1] BUCUR D., TREBESCHI P., *Shape optimization problem governed by nonlinear state equation*, Proc. Royal Soc. Edinburg (di prossima pubblicazione).
[2] BUCUR D., BUTTAZZO G., TREBESCHI P., *Existence results for optimal obstacles*, J. of Func. Anal. (di prossima pubblicazione).
[3] BUTTAZZO G., DAL MASO G., *An existence result for a class of shape optimization problems*, Arch. Rational Mech. Anal., **122** (1993), 183-195.
[4] BUCUR D., ZOLESIO J.P., *Wiener Criterion and Shape Continuity for the Dirichlet Problem* Bollettino U.M.I, (di prossima pubblicazione).
[5] SVERAK V., *On Optimal Shape Design*, Jour. Math. Pures. Appl., **72** (1993), 537-551.

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa
e-mail: trebesch@dm.unipi.it
Dottorato in matematica (sede amministrativa: Pisa) - Ciclo IX
Direttore di ricerca: Prof. Giuseppe Buttazzo, Università di Pisa