Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Barbara Trivellato

Ottimalità quasi certa nel controllo stocastico

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1999), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 157–160.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_1S_157_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 2-A Suppl. (1999), pag. 157-160

Ottimalità quasi certa nel controllo stocastico.

BARBARA TRIVELLATO

1. – Introduzione.

La tesi tratta problemi di Controllo Stocastico a tempo continuo su orizzonte infinito, con criteri di ottimalità che devono essere verificati quasi certamente o in probabilità. Tali criteri risultano spesso piu forti dei corrispondenti criteri in media usualmente impiegati nel controllo stocastico e di conseguenza possono rivelarsi particolarmente utili qualora sia importante evitare rischiose fluttuazioni dei costi attorno alla loro media.

Le problematiche affrontate sono state nel passato trattate nel contesto della teoria lineare con costi quadratici ([1, 3, 5, 6, 7]).

Nella tesi si studia il problema in un contesto piu generale, relativo a processi di diffusione non necessariamente lineari, processi di punto ad intensità controllata e processi di Markov a stati finiti. Si dimostrano dei teoremi che forniscono condizioni sufficienti per l'esistenza di controlli ottimali quasi certamente ed in probabilità quando i processi siano definiti in senso debole, cioè quali misure di probabilità sullo spazio delle traiettorie, nonché per qualunque legge congiunta dei processi generati rispettivamente da un arbitrario controllo e dal controllo ottimale. Infine, si considerano diversi modelli per cui le assunzioni nei teoremi di ottimalità risultano soddisfatte.

Tutti gli esempi che si riportano nella tesi sono tratti da articoli o libri sulla teoria classica del controllo stocastico in media. Ciò significa che si analizza l'ottimalità quasi certa ed in probabilità di controlli che sono già ottimali secondo il criterio di minimizzazione del costo medio per unità di tempo.

In questa nota si è scelto di enunciare alcune nozioni fondamentali e di riportare alcuni esempi di modelli che soddisfano le condizioni richieste dai teoremi di ottimalità di cui si parla sopra. Per ragioni di spazio, precisi enunciati e dimostrazioni vengono omessi e per essi si rimanda al testo originale.

2. – Definizioni fondamentali.

Nella tesi si considerano dei processi stocastici le cui traiettorie appartengono a D, dove D è lo spazio delle funzioni càdlàg (continue nel caso diffusivo) da $[0, +\infty)$ in $\mathbf{R}^d$. Sia U uno spazio misurabile. Per ogni $v \in U$ sia L^v un operatore markoviano su un opportuno dominio $\mathcal{D}(L^v)$ di funzioni da $\mathbf{R}^d$ in $\mathbf{R}$. Il dominio $\mathcal{D}(L^v)$ può dipendere da v. Tuttavia, si suppone che esista un *nucleo* $\mathcal{C}$ per L^v indipendente da v. Si definisce *controllo* un processo progressivamente misurabile $u:[0, +\infty)\times D\to U$ (scriveremo $u_t(\cdot)$ al posto di $u(t, \cdot)$). Assegnata una misura di probabilità μ su $\mathbf{R}^d$ ed una fuzione misurabile (*costo corrente*) $c:\mathbf{R}^d\times U\to [0, +\infty)$, si dice che un controllo u è *ammissibile* se le seguenti proprietà sono soddisfatte:

1. Esiste una misura di probabilità P^u su D tale che, per ogni $f\in\mathcal{C}$, il processo

$$f(x_t)-\int_0^t (L^{u_s}f)(x_s)\,ds$$

è una P^u-martingala locale e $P^u\circ\pi_0^{-1}=\mu$;

2. Per ogni $t>0$ vale la disuguaglianza

$$J_t(u):=\int_0^t c(x_s, u_s)\,ds<+\infty \quad P^u-q.c.$$

Indicheremo con $\mathcal{U}$ l'insieme dei controlli ammissibili.

Sia $g:[0, +\infty)\to(0, +\infty)$ una funzione non crescente tale che $\lim_{t\to+\infty} g(t)=0$, e sia $P^{u^*,u}$ una misura di probabilità su $D\times D$ avente P^{u^*} e P^u come misure marginali su D.

DEFINIZIONE 1. – *Un controllo $u^*\in\mathcal{U}$ dicesi g-ottimo quasi certamente (in probabilità) se, per ogni $u\in\mathcal{U}$ e per ogni misura di accoppiamento $P^{u^*,u}$ tale che*

$$P^{u^*,u}\{(x, y)\in D\times D: x_0\neq y_0\}=0,$$

vale l'uguaglianza

$$\lim_{t\to+\infty} g(t)[J_t(u^*)-J_t(u)]^+=0 \tag{1}$$

$P^{u^*,u}$-quasi certamente (in probabilità).

OSSERVAZIONE 1. – *La nozione di g-*ottimalità della Definizione 1 *è in accordo con la scelta di non riferirsi ad alcuno spazio di probabilità. Essa è piu forte delle nozioni di g-ottimalità precedentemente date (vedi* [1,3,5,6,7]) *perché richiede che l'uguaglianza* (1) *valga per ogni, e non* per qualche, *misura di ccoppiamento $P^{u^*,u}$.*

3. – Esempi.

Per diverse classi di modelli si può provare che il controllo u^* che minimizza il costo medio per unità di tempo (ottenuto tramite l'equazione stazionaria di Hamilton-Jacobi-Bellman) è g-ottimo per $g(t) = t^{-\alpha}$, con $\alpha > 1/2$ qualsiasi.

ESEMPIO 1. – *Il modello lineare-quadratico gaussiano.*

$$dx_t = (Ax_t + Bu_t)\, dt + G dw_t$$

$$J_t(u) = \int_0^t (x_s' Q x_s + u_s' R u_s)\, ds$$

con Q, R matrici simmetriche definite positive e (A, B) stabilizzabile.

OSSERVAZIONE 2. – *Per il modello LQG recentemente (vedi* [1]*) è stato dimostrato che per ogni $u \in \mathcal{U}$ esiste* <u>*una*</u> *misura di accoppiamento $P^{u^*, u}$ tale che*

$$\lim_{t \to +\infty} g(t)[J_t(u^*) - J_t(u)]^+ = 0$$

$P^{u^*, u}$-q.c. per ogni $g(t) = o(1/\log t)$ e in probabilità per ogni $g(t) = o(1)$.

ESEMPIO 2. – *Diffusioni uniformemente ergodiche.*

$$dx_t = (f(x_t) + u_t)dt + dw_t$$

$$J_t(u) = \int_0^t \left(l(x_s) + \frac{1}{2} \|u_s\|^2 \right) ds$$

con le seguenti assunzioni:

(i) $l \geq 0$, $l \in C_b^1$;

(ii) $f \in C^2 \cap C_b^1$;

(iii) *esiste una costante $c > 0$ tale che per ogni $x, y \in \mathbf{R}^d$*

$$(x - y) \cdot (f(x) - f(y)) \leq -c\|x - y\|^2.$$

L'esistenza del controllo u^* ottimale in media è provata in [4].

ESEMPIO 3. – *Diffusioni con coefficienti periodici.*

$$dx_t = f(x_t, u_t)\, dt + dw_t$$

$$J_t(u) = \int_0^t c(x_s, u_s)\, ds$$

con le seguenti assunzioni:

(i) *U spazio metrico compatto;*

(ii) *f, c funzioni continue in (x, u), α-Hölder continue in x uniformemente rispetto a u;*

(iii) *f, c funzioni periodiche in x. L'esistenza del controllo u^* ottimale in media è provata in* [2].

ESEMPIO 4. – *Processi di Markov a stati finiti.*

$$L^v f(x) = \sum_{y \in X,\, y \neq x} l_{x,y}(v)[f(y) - f(x)]$$

$$J_t(u) = \int_0^t c(x_s, u_s)\, ds$$

con le seguenti assunzioni:

(i) *U spazio metrico compatto;*

(ii) *X insieme finito;*

(iii) *$l_{x,y}(\cdot)$ e $c(x, \cdot)$ funzioni continue, $l_{x,y} > 0$.*

BIBLIOGRAFIA

[1] BELKINA T.A., KABANOV YU.M. and PRESMAN E.L., *Stochastic linear-quadratic regulator. Optimality almost sure and in probability*, preprint.

[2] BENSOUSSAN A., *Perturbation methods in optimal control*, J. Wiley & Sons, Paris, 1988.

[3] DI MASI G.B. and KABANOV YU.M., *On sensitive probabilistic criteria in the linear regulator problem with the infinite horizon*, Stochastic Processes and Optimal Control, A.A. Novikov ed., TVP Publishing Company, Moscow, (1994).

[4] FLEMING W.H. and MCENEANEY W.M., *Risk-sensitive control on an infinite time horizon*, SIAM J. Control and Optimization, **33** (1995), 1881-1915.

[5] LEIZAROWITZ A., *On almost sure optimization for stochastic control systems*, Stochastics, **23** (1988), 85-107.

[6] PRESMAN E.L., *Optimality almost sure and in probability for stochastic linear quadratic regulator*, Theory of Probability and its Applications, **42** (1997), 531-535.

[7] PRESMAN E.L., ROTAR V.I. and TAKSAR M., *Optimality in probability and almost surely. The general scheme and a linear regulator problem*, Stochastics and Stochastics Reports, **43** (1993), 127-133.

Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Università di Padova
e-mail: barbara@euler.math.unipd.it
Dottorato in Matematica Computazionale ed Informatica Matematica
(sede amministrativa: Padova) - Ciclo X
Direttore di ricerca: Prof. Giovanni B. Di Masi, Università di Padova