Luigi Barletti

Un modello matematico per il trasporto di radiazione in mezzi aleatori

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1999), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 163–166.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_1S_163_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 2-A Suppl. (1999), pag. 163-166

Un modello matematico per il trasporto di radiazione in mezzi aleatori.

LUIGI BARLETTI

1. – Introduzione.

Il passaggio della radiazione attraverso un mezzo materiale dal quale la radiazione stessa può venire assorbita e dispersa è descritto con una certa generalità da un'equazione di Boltzmann linearizzata, detta *equazione del trasporto*:

$$\frac{\partial}{\partial t} f + c \vec{v} \cdot \nabla f = Qf, \tag{1}$$

esprimente il bilancio statistico del numero di fotoni in un volume infinitesimo dello spazio delle fasi e in un intervallo infinitesimo di tempo. L'operatore lineare Q è il cosiddetto *termine collisionale* che tiene conto dei fenomeni di interazione fra radiazione e materia circostante (assorbimento e scattering). L'equazione del trasporto dev'essere corredata di condizioni al contorno (tipicamente una relazione lineare o affine tra flusso entrante e flusso uscente attraverso il bordo della regione di spazio considerata) e da una condizione iniziale.

In un ordinario problema di trasporto radiativo si assume che le proprietà fisiche del mezzo ospite siano conosciute con certezza e in base a queste si assegna l'operatore collisionale Q. Tuttavia, in molte situazioni la conoscenza che si ha del mezzo ospite è approssimativa e incerta, oppure il mezzo è talmente turbolento e caotico da rendere impensabile una sua descrizione esatta. In entrambi questi casi è indispensabile ricorrere ad un approccio *probabilistico.* Di conseguenza l'operatore collisionale non è conosciuto con certezza ma dovrà essere descritto come $Q = Q(\omega)$, $\omega \in \Omega$, dove

$$\mathcal{M} := (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$$

è un opportuno spazio di probabilità.

La teoria del trasporto in siffatti *mezzi aleatori* ha una gamma notevole di applicazioni fisiche e tecnologiche, [3]. La nostra ricerca, in particolare, ha preso spunto da problematiche relative alla fisica del mezzo interstellare, dove è di un certo interesse lo studio della penetrazione della radiazione ultravioletta nelle grandi nubi molecolari, [4]. Recenti osservazioni danno prova evidente di una struttura non omogenea di tali nubi e confermano piuttosto l'ipotesi di una grande distesa di materiale (atomi, molecole, grani di polvere) a bassissima densità, popolata di piccole «nuvolette», dette *clumps,* in cui la densità aumenta fino a un fattore 10^4. L'eccessiva lontananza e l'opacità del mezzo impediscono di determinare esattamente il numero, la forma e la distribuzione dei clumps, rendendo necessaria una descrizione statistica del mezzo e la conseguente adozione di un'equazione di trasporto aleatoria per i fotoni ultravioletti.

2. – Analisi astratta del modello.

Nella tesi abbiamo proposto e sviluppato la seguente impostazione. La (1) è un'equazione di evoluzione in uno spazio di Banach X di tipo L^1, [2], nella quale l'operatore collisionale Q è una variabile aleatoria a valori nell'algebra di Banach $\mathcal{B}[X]$ degli operatori lineari e limitati su X:

$$Q : \Omega \to \mathcal{B}[X], \qquad \omega \mapsto Q(\omega).$$

Si perviene perciò allo studio di un'equazione di evoluzione astratta in X della forma

$$f'(t) = Tf(t) + Qf(t), \qquad f(0) = x_0, \tag{2}$$

dove T è un operatore lineare non limitato «deterministico», cioè indipendente da ω, mentre $Q = Q(\omega)$ è una perturbazione (lineare e limitata) aleatoria. Il dato iniziale x_0 è un assegnato elemento di X, mentre le condizioni al contorno possono essere opportunamente inglobate nella definizione del dominio $\mathcal{D}(T) \subseteq X$ di T.

La via scelta per trattare il sistema (2) è quella di fornire dei criteri per «immergere» in modo canonico tale sistema nello spazio di variabili aleatorie $\mathrm{L}^p(\mathcal{M}, X)$. In particolare, si associa a T l'operatore deterministico $\widehat{T}$ in $\mathrm{L}^p(\mathcal{M}, X)$ definito da

$$(\widehat{T})(\omega) := Tu(\omega), \qquad q.\ o.\quad \omega \in \Omega$$

$$\mathcal{D}(\widehat{T}) := \{u \in \mathrm{L}^p(\mathcal{M}, X) \,|\, u(\omega) \in \mathcal{D}(T) \ \text{ q. o. } \ \omega \in \Omega \ \text{ e } \ \widehat{T}u \in \mathrm{L}^p(\mathcal{M}, X)\}.$$

Il seguente teorema ci dice che se T genera una dinamica fortemente continua su X, allora $\widehat{T}$ genera una corrispondente dinamica fortemente continua «deterministica» su $\mathrm{L}^p(\mathcal{M}, X)$.

TEOREMA 1. – *Se T è un generatore di semigruppo e^{tT} di classe $\mathcal{G}[m, \beta, X]$, allora $\widehat{T}$ è un generatore di semigruppo $\mathrm{e}^{t\widehat{T}}$ di classe $\mathcal{G}[m, \beta, \mathrm{L}^p(\mathcal{M}, X)]$. Inoltre*

$$\mathrm{e}^{t\widehat{T}} = \widehat{\mathrm{e}^{tT}} \qquad \forall t \geq 0.$$

Se poi definiamo, per ogni $u \in \mathrm{L}^p(\mathcal{M}, X)$

$$(\widetilde{Q}u)(\omega) := Q(\omega)\, u(\omega), \qquad \text{q. o.} \quad \omega \in \Omega,$$

si ha il seguente

TEOREMA 2. – *Se $Q : \Omega \to \mathcal{B}[X]$ è misurabile in senso forte e uniformemente limitata, allora $\widetilde{Q} \in \mathcal{B}[\mathrm{L}^p(\mathcal{M}, X)]$.*

Identificando T con $\widehat{T}$ e Q con $\widetilde{Q}$, possiamo rileggere il sistema (2) come un problema di evoluzione nello spazio $\mathrm{L}^p(\mathcal{M}, X)$, per il quale possiamo stabilire un teorema di esistenza e unicità grazie agli strumenti standard della teoria dei semigruppi, [2].

TEOREMA 3. – *Se T e Q soddisfano le ipotesi dei teoremi 1 e 2, allora, per ogni $x_0 \in \mathcal{D}(T)$, il sistema (2) ha un'unica soluzione (classica) $f:[0, +\infty) \to \mathrm{L}^p(\mathcal{M}, X)$ e inoltre*

$$f(t)(\omega) = \mathrm{e}^{t[T+Q(\omega)]} x_0 \qquad q.\ o.\quad \omega \in \Omega .$$

Tale risultato, qui presentato nella sua forma più semplice può essere generalizzato per includere un dato iniziale aleatorio e termini di sorgente (interni o al bordo) anch'essi aleatori.

3. – Il problema della media.

Dal punto di vista delle applicazioni, uno degli scopi fondamentali della teoria del trasporto in mezzi aleatori è quello di fornire stime del valore atteso di f (e magari anche momenti di ordine superiore), evitando il procedimento «diretto» (numericamente troppo dispendioso) che consisterebbe prima nel risolvere l'equazione di trasporto deterministica in corrispondenza di «tanti» ω fissati e poi nel calcolare la media di tutte le soluzioni così ottenute.

Definito l'operatore di aspettazione

$$Eu := \int_\Omega u(\omega)\, d\mathbf{P}(\omega), \qquad u \in \mathrm{L}^p(\mathcal{M}, X),$$

il *problema della media* per il sistema astratto (2) consiste nel cercare un metodo di stima di $\langle f \rangle(t) := Ef(t)$, dove $t \mapsto f(t)$ è la soluzione del sistema.

L'approccio standard al problema della media fa uso della cosiddetta «tecnica dello *smoothing*», [3]. Questa consiste nel proiettare il sistema (2) secondo la decomposizione

$$I = E \oplus (I - E).$$

Si deduce così un sistema nelle incognite $\langle f \rangle$ e $f^* := f - \langle f \rangle$ (media e scarto dalla media). Da questo è poi possibile dedurre un'equazione (esatta) per la sola incognita $\langle f \rangle$, che può essere convenientemente approssimata.

La tecnica dello smoothing conduce, salvo casi molto semplici, ad una gerarchia di equazioni di struttura piuttosto complessa e non molto maneggevoli da un punto di vista numerico. Sotto opportune ipotesi (e per $p = 2$) è possibile introdurre un diverso approccio, più semplice ed efficiente, che si basa su una decomposizione del tipo

$$I = \bigoplus_{k=0}^{\infty} E_k,$$

in cui $E_0 \equiv E$, [1]. Gli operatori E_k proiettano $\mathrm{L}^2(\mathcal{M}, X)$ su sottospazi del tipo

$$Y_k := \{ x \otimes e_k \,|\, x \in X \},$$

dove $\{e_0, e_1, e_2, \dots\}$ è un sistema ortonormale completo di $L^2(\mathcal{M}, \mathbf{C})$, con $e_0 \equiv 1$. In particolare, tale metodo può essere adottato nel caso in cui la descrizione probabilistica dipende da un numero finito di parametri aleatori ($\Omega \subset \mathbf{R}^n$).

Entrambi i metodi descritti forniscono come approssimazione «di ordine zero» la cosiddetta equazione *atomic mix*:

$$\langle f \rangle'(t) \approx T\langle f \rangle(t) + \langle Q \rangle \langle f \rangle(t), \qquad \langle f \rangle(0) = x_0, \tag{3}$$

dove l'operatore $\langle Q \rangle$ è definito da

$$\langle Q \rangle\, x := \int_{\Omega} Q(\omega)\, x\, d\mathbf{P}(\omega), \qquad x \in X.$$

Pertanto l'equazione (3) approssima gli effetti dell'operatore aleatorio $Q(\omega)$ con il suo «effetto medio». Il nome *atomic-mix* deriva dalla teoria del trasporto stocastico, dove tale approssimazione può ritenersi esatta quando il mezzo ospite è costituito da due materiali distribuiti in modo aleatorio, ma miscelati abbastanza finemente da poter sostituire il mezzo aleatorio con un mezzo deterministico dalle proprietà medie, [3].

In reticoli di Banach si dimostra, sotto opportune ipotesi, una disuguaglianza di tipo Jensen

$$\mathrm{e}^{t(T + \langle Q \rangle)} \leqslant \langle \mathrm{e}^{t(T+Q)} \rangle, \qquad \forall t \geqslant 0, \tag{4}$$

che ci mostra come la soluzione atomic-mix costituisca un limite inferiore per la soluzione esatta. Dal punto di vista del trasporto di radiazione, la (4) significa che, a parità di spessore ottico medio, la radiazione è maggiormente attenuata da una nube uniforme che non da una nube con clumps.

BIBLIOGRAFIA

[1] Barletti L., *A Fourier-like method for the expectation problem in stochastic transport theory*, Transport Theory and Statistical Physics, **27** (1998), 289-302.

[2] Pazy A., *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer Verlag, Berlin (1983).

[3] Pomraning G. C., *Transport theory in discrete stochastic mixtures*, Advances in Nuclear Science and Technology, **24** (1996), 47-93.

[4] Saccomandi G. and Belleni-Morante A., *Time dependent photon transport in a three dimensional interstellar cloud with stochastic clumps*, Astrophysics and Space Science, **234** (1995), 85-105.

Dipartimento di Matematica Applicata, Università di Firenze
e-mail: barletti@dma.unifi.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Firenze) - Ciclo IX
Direttore di ricerca: Prof. Aldo Belleni-Morante, Università di Firenze