Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Serena Matucci

Trasporto di particelle in presenza di condizioni al contorno non locali semitrasparenti. Operatori d'onda e di scattering. Aspetti deterministici e aleatori

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1999), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 167–170.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_1S_167_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 2-A Suppl. (1999), pag. 167-170

Trasporto di particelle in presenza di condizioni al contorno non locali semitrasparenti. Operatori d'onda e di scattering. Aspetti deterministici e aleatori

SERENA MATUCCI

Questa tesi è dedicata allo studio dell'evoluzione temporale di una distribuzione di particelle dipendenti dalla velocità nell'intero spazio $\mathbb{R}^3$, assumendo la presenza di una regione limitata e convessa nella quale le particelle possono subire collisioni con il materiale ivi contenuto. All'esterno di questa regione si suppone la presenza del vuoto. La superficie di separazione tra l'esterno e l'interno di tale regione è supposta permettere un parziale passaggio di particelle provenienti sia dall'interno che dall'esterno, possibilmente con deviazione e/o assorbimento delle particelle. Si assume infine che la distribuzione in considerazione sia costituita da un solo tipo di particelle, le cui mutue interazioni possano essere trascurate, e che non sia presente alcuna forza esterna.

Indichiamo con $D \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme aperto, convesso e limitato, descrivente l'interno della regione nella quale assumiamo che abbiano luogo le interazioni e la cui frontiera è il luogo dei possibili fenomeni di trasmissione parziale e/o riflessione. Descrivendo lo stato della nube di particelle al tempo t mediante una funzione di densità $f(t)$ sullo spazio delle fasi $\mathbb{R}^3 \times V \times [0, +\infty)$, (il tempo $t \in [0, +\infty)$, la posizione $x \in \mathbb{R}^3$, la velocità $v \in V \in \mathbb{R}^3$), la funzione $f: \mathbb{R}^3 \times V \times [0, +\infty)$ deve soddisfare l'equazione di Boltzmann lineare sia in D che all'esterno $\overline{D}^c$ di D. Classicamente viene considerato il problema dell'evoluzione temporale della distribuzione di particelle soltanto all'interno della regione D. La funzione di densità della nube di particelle $f_1(t)$, definita sullo spazio delle fasi $D \times V$, $V \subset \mathbb{R}$ per $t \geq 0$, soddisfa l'equazione di Boltzmann lineare; la distribuzione iniziale di particelle e il flusso di particelle entrante in D si assumono assegnati, e il meccanismo di riflessione/trasmisione alla frontiera si suppone noto, di tipo lineare [1]. La condizione al contorno assume quindi la forma

$$f_{1+}(x, v, t) = (Kf_{1-})(x, v, t) + g(x, v, t) \tag{1}$$

per (x, v) appartenente alla parte di frontiera dello spazio delle fasi corrispondente ai flussi entranti nella regione D, $t > 0$; $f_{1+}(t)$, $f_{1-}(t)$ denotano rispettivamente la restrizione di $f_1(t)$ alla parte della frontiera dello spazio delle fasi corrispondente ai flussi entranti ed uscenti, g è il flusso incidente assegnato e K è infine un operatore lineare limitato e positivo che descrive i processi che avvengono alla frontiera, quali assorbimento, parziale riflessione, ecc.

Una ampia letteratura è dedicata a questi problemi di trasporto con condizioni al contorno non omogenee, considerando situazioni più o meno generali; citiamo ad esempio le monografie [2], [4]. Il metodo di risoluzione classico per tali problemi si basa sulla costruzione di una funzione che sia un sollevamento del dato al contorno, cioè tale che, ristretta alla parte della frontiera dello spazio delle fasi corrispondente ai flussi entranti, coincida quasi ovunque con il flusso entrante g assegnato, e sia nulla quasi ovunque sulla parte della frontiera dello spazio delle fasi corrispondente ai flussi uscenti.

Non c'è chiaramente un unico modo di costruire tale sollevamento; è anche chiaro che in generale non è possibile trovare una funzione che sia molto regolare rispetto al tempo se il flusso entrante assegnato non è esso stesso molto regolare. Risultati classici mostrano che se il flusso entrante assegnato è di classe $C^1([0, T)) \cap C^2((0, T))$ rispetto al tempo, allora esiste una unica soluzione classica.

Tale condizione è soltanto sufficiente, e, se pensiamo ad un flusso entrante dato dalla restrizione dello streaming libero di una distribuzione di particelle assegnate all'esterno della regione in esame, fisicamente non c'è ragione per cui la soluzione non sia classica, nonostante che tale flusso non abbia la regolarità richiesta. Questa è una delle motivazioni che hanno indotto in questa tesi ad affrontare il problema da un punto di vista nuovo: è plausibile pensare che il flusso entrante in D sia dato dalla restrizione alla parte della frontiera di $D \times V$ corrispondente ai flussi entranti, di una distribuzione di particelle la cui evoluzione all'esterno di D è descritta anche essa da una equazione di trasporto lineare.

La frontiera di D possibilmente sarà parzialmente riflettente anche per le particelle che arrivano ad urtarla provenienti dall'esterno di D. In questa ottica il problema di trasporto interno a D viene accoppiato, mediante le condizioni al contorno, ad un analogo problema di trasporto nella regione complementare $\overline{D}^c$; i flussi entranti in D e nel suo complementare non si assumono assegnati, ma sono dati dall'azione di opportuni operatori al contorno, i quali desrivono i meccanismi di parziale riflessione, rifrazione e/o assorbimento, ed agiscono sulle restrizioni alla frontiera di $D \times V$ delle distribuzioni di particelle.

Un'altra motivazione che mi ha indotto ad affrontare da questo punto di vista tale problema di trasporto è l'interesse per il comportamento asintotico della distribuzione di particelle; poiché la frontiera di D permette un parziale passaggio delle particelle, ha chiaramente interesse non soltanto guardare l'evoluzione per tempi lunghi delle particelle all'interno di D, ma anche seguirne l'evoluzione all'esterno.

Indichiamo quindi con f_1 e f_2, rispettivamente, le distribuzioni di particelle nella regione D e nel suo complementare, e siano $B_1^{\pm}$ l'operatore di traccia che ad una funzione con supporto in D associa la sua restrizione alla parte della frontiera dello spazio delle fasi corrispondente ai flussi entranti (segno positivo) e uscenti (segno negativo) da D, $B_2^{\pm}$ l'operatore di traccia che ad una funzione con supporto il complementare di D associa la sua restrizione alla parte dello spazio delle fasi corrispondente ai flussi entranti (segno negativo) e uscenti (segno positivo) dallo stesso $\overline{D}^c$. Il problema affrontato è quindi il seguente:

$$
\text{(2.}a\text{)}\quad \frac{\partial f_1}{\partial t}(x, v, t) = -v \cdot \nabla_x f_1(x, v, t) + \int_V k(x, v, v')\, f_1(x, v', t)\, d\nu(v')
$$

$$
-\sigma_a(x, v)\, f_1(x, v, t) + h_1(x, v, t), \quad \text{per } (x, v) \in D \times V, t > 0
$$

$$(2.b)\qquad \frac{\partial f_2}{\partial t}(x, v, t) = -v\cdot\nabla_x f_2(x, v, t) + h_2(x, v, t), \qquad \text{per } (x, v) \in \overline{D}^c \times V,\ t > 0$$

$$(2.c)\qquad B_1^+ f_1(t) = K_{11} B_1^- f_1(t) + K_{12} B_2^+ f_2(t), \qquad \text{su } \partial D \times V, \text{ per } t > 0$$

$$(2.d)\qquad (B_2^- f_2(t) = K_{21} B_1^- f_1(t) + K_{22} B_2^+ f_2(t), \qquad \text{su } \partial D \times V, \text{ per } t > 0$$

$$(2.e)\qquad f_1(0) = f_1^0, \qquad \text{in } D \times V,$$

$$(2.f)\qquad f_2(0) = f_2^0, \qquad \text{in } \overline{D}^c \times V,$$

essendo σ_a la sezione d'urto, k il nucleo di scattering e $h_1(t)$, $h_2(t)$ termini di sorgente (se non negativi) o di pozzo (se non positivi); tali funzioni si assumono assegnate. Gli operatori al contorno K_{ij} sono lineari, limitati e positivi; gli operatori di riflessione K_{ii} sono contrazioni strette. Si è assunto che la massa totale delle particelle si conservi in seguito all'urto con la frontiera di D; tale ipotesi è la più interessante da un punto di vista fisico e non è restrittiva [3]. Tali condizioni al contorno sono molto generali e sono state trattate in questa tesi per la prima volta in letteratura.

TEOREMA 1. – *Il problema ai valori iniziali e al contorno* (2) *ammette una unica soluzione classica* $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$ *nello spazio di Banach* $\mathcal{X} = L^1(D \times V) \times L^1(\overline{D}^c \times V)$. *In particolare se* $f_0 = (f_1(0), f_2(0)) \geq 0$ *in* $\mathcal{X}$, *allora* $f(t) \geq 0$ *in* $\mathcal{X}$, $\forall t \geq 0$.

DIMOSTRAZIONE. – Si considera dapprima il problema lineare ottenuto assumendo il vuoto anche in D e assenza di termini di sorgente (cioè studiando gli effetti delle sole condizioni di parziale riflessione e rifrazione alla frontiera di D). Successivamente si considera il problema generale,applicando la teoria delle perturbazioni dei semigruppi di operatori lineari limitati in spazi di Banach di tipo L^1. Opportune ipotesi di regolarità per le funzioni assegnate permettono di dimostrare il Teorema, ottenendo anche utili stime della norma della soluzione e la sua struttura esplicita nel caso semplificato [3]. ■

Altro problema affrontato nella tesi è quello dello studio del comportamento asintotico delle soluzioni del problema (2) con assenza di termini di sorgente, confrontandolo per tempi lunghi con l'evoluzione libera in tutto $\mathbb{R}^3$; la teoria matematica che tratta problemi di questo tipo è la teoria dello scattering; gli oggetti che sono di importanza fondamentale in questa teoria sono gli operatori d'onda, definiti come limiti forti nella topologia di $\mathcal{X}$ della composizione del gruppo di streaming libero $U_0(t)$ e del semigruppo $U(t)$ descrivente la dinamica in esame. La loro composizione è il cosiddetto operatore di scattering:

$$W_- g = \lim_{t \to -\infty} U(t)\, U_0(-t)\, g, \qquad W_+ g = \lim_{t \to +\infty} U_0(-t)\, U(t)\, g, \qquad S = W_+ W_- .$$

Può accadere che nessuno dei due operatori esista; se ad esempio il numero totale di particelle cresce indefinitamente nel tempo a causa dei termini di produzione all'interno di D, è impossibile un andamento asintotico che si avvicini a quello dell'evoluzione libera, per il quale il numero di particelle si mantiene costante nel tempo. D'altra parte, anche se il semigruppo $U(t)$ è uniformemente limitato, si può verificare un fenomeno di parziale intrappolamento delle particelle all'interno di D, determinato dalle condizioni di parziale riflessione delle pareti interne e dalla presenza di termini di produzione in D; in questo caso non esiste l'operatore d'onda W_+.

Nella tesi sono dimostrati teoremi necessari e sufficienti ad assicurare l'esistenza di entrambi gli operatori d'onda e quindi dell'operatore di scattering; in particolare nel caso di parziale intrappolamento delle particelle si è data una definizione di operatore d'onda generalizzato che estende i concetti già presenti in letteratura. L'ultima problematica affrontata nella tesi è stata quella della formulazione e risoluzione di una generalizzazione del problema di trasporto fin qui trattato, ottenuta supponendo la presenza di termini aleatori, cioè assumendo elementi di incertezza nella determinazione dei termini di assorbimento e di produzione, degli operatori al contorno, del dato iniziale e di eventuali termini di sorgente. I parametri che descrivono il problema vengono quindi riguardati come funzioni definite su di uno spazio di probabilità, a valori in uno spazio di Banach, misurabili; la soluzione del problema che risulta così definito viene riguardata come una applicazione dal prodotto cartesiano dello spazio di probabilità e di $\mathbb{R}^+$ a valori nello spazio di Banach $\mathcal{X}$, misurabile rispetto alla prima variabile e differenziabile con continuità rispetto t. Nella tesi viene provato un teorema di esistenza ed unicità della soluzione così definita, e vengono inoltre determinate condizioni sufficienti ad assicurare che la soluzione ammetta valore atteso. È inoltre investigato il significato fisico degli operatori d'onda aleatori (nelle ipotesi che ne assicurano l'esistenza) nell'ottica del confronto asintotico tra il valore atteso delle soluzione di questo problema e le soluzioni del problema di streaming libero (deterministico) in tutto $\mathbb{R}^3$.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. H. Ferziger and H. G. Kaper, *Mathematical theory of transport processes in gases*, North Holland Publ. Co., Amsterdam (1972).

[2] W. Greenberg, C. van der Mee and V. Protopopescu, *Boundary value problems in abstract kinetic theory*, Birkhäuser-Verlag, Basel (1987).

[3] S. Matucci, *A transport problem with semitransparent boundary conditions*, Nonlinear Analysis TMA, Serie B (1999).

[4] J. Voigt, *Functional analytic treatment of the initial boundary value problem for collisionless gases*, PhD Thesis, Universität Munchen (1981).

Dipartimento di Matematica «U. Dini», Università di Firenze
e-mail: matucci@alibaba.math.unifi.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Firenze) - Ciclo IX
Direttore di ricerca: Prof. Giorgio Busoni, Università di Firenze