Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Patrizia Rogolino

Modelli geometrici in termomeccanica classica dei continui con applicazioni a fenomeni irreversibili

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1999), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 171–174.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_1S_171_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 2-A Suppl. (1999), pag. 171-174

Modelli geometrici in termomeccanica classica dei continui con applicazioni a fenomeni irreversibili.

PATRIZIA ROGOLINO

1. – Processi in un fibrato termodinamico.

Utilizzando ed opportunamente generalizzando la teoria sviluppata da Coleman-Owen [2], nella tesi, viene proposta una formulazione geometrica dei processi negli spazi termodinamici, con esplicito riferimento al caso in cui la loro struttura non sia a priori fissata ma possa variare al variare del tempo. In questo caso risulta definito lo spazio degli stati istantaneo ad ogni istante di tempo t e, come per la formulazione quadridimensionale della Meccanica Classica [1] sull'universo newtoniano $\mathcal{U}$, si rende necessario operare sull'unione (disgiunta) di tutti questi spazi degli stati istantanei, che costituisce una sorta di «universo termodinamico».

Considerato quindi un elemento materiale si suppone che sia definito univocamente il suo *spazio degli stati in ogni istante di tempo* t, denotato con B_t, che si assume abbia la struttura di varietà differenziabile finito-dimensionale. La dipendenza di B_t dal tempo t può corrispondere, per esempio, all'insorgere di fenomeni di transizione di fase, oppure all'evoluzione di variabili «nascoste» (per esempio, variabili interne). Lo «spazio totale degli stati» può essere quindi definito come unione disgiunta:

$$\mathcal{S} = \bigcup_t \{t\} \times B_t \tag{1}$$

con una struttura naturale di varietà fibrata sulla retta reale R, dove scorre il tempo, opportunamente individuata dalle ipotesi fisiche a priori sul sistema termodinamico considerato (ovvero, da leggi di natura «costitutiva» che ci dicano come le fibre B_t si incollano tra di loro al variare di t). Questo spazio è detto per semplicità *fibrato (o universo) termodinamico*. Lo spazio dei processi π è costituito da funzioni

$$P_t^A : [t_0, t_f] \to \mathcal{G} \tag{2}$$

dove $[t_0, t_f]$ è un qualsiasi intervallo di tempo lo spazio $\mathcal{G}$ è un opportuno spazio vettoriale suggerito dal modello, l'apice A distingue i diversi processi e $t \in R$ è detto *durata* del processo P_t^A. Ciascun processo ha le seguenti proprietà:

(i) $\exists D : R \times \Pi \to \mathcal{P}(B_0)$, *detta* **funzione dominio**; $B_0 \equiv B_{t_0}$ *è lo spazio degli stati iniziali, dove* $\mathcal{P}(B_0)$ *é l'insieme delle parti di* B_0; *l'insieme* $D_t^A \equiv D(P_t^A)$ *è il dominio dell'A-esimo processo di durata* $t = t_f - t_0$.

(ii) $\exists R : R \times \Pi \rightarrow \mathcal{P}(B_f)$, *detta* **funzione rango** (o **codominio**); il sottoinsieme $R_t^A \equiv R(P_t^A)$ *dello spazio degli stati istantaneo* $B_f \equiv B_{t_f}$ *relativo all'istante finale individua il rango dell'A-esimo processo*;

(iii) *esistono processi ottenuti dalle restrizioni*

$$P_\tau^A = P_t^A \mid_{[t_0,\, \tau]} \qquad (\tau < t) \tag{3}$$

denominati **processi ristretti.**

Inoltre, fissato un processo resta determinata una mappa ϱ, detta trasformazione indotta dal processo

$$\varrho : R \times \pi \rightarrow C^0(B_0, B_f) \tag{4}$$

tale che per ogni coppia $(t, P_t^A) \in R \times \pi$ si abbia

$$\varrho_t^A \equiv \varrho(P_t^A) : D_t^A \rightarrow R_t^A \tag{5}$$

Definita ora una funzione del tempo nel seguente modo:

$$\lambda_b^A(\tau) = \begin{cases} b & \tau = t_0 \qquad b \in D_t^A \\ \varrho_t^A(b) & \tau \in]t_0,\, t_f] \end{cases}$$

una trasformazione per il sistema è una curva nello spazio totale degli stati definita mediante la seguente mappa:

$$\sigma_b : R \rightarrow \mathcal{S} \tag{7}$$

tale che per ogni trivializzazione locale del fibrato termodinamico $\mathcal{S}$ si abbia:

$$\sigma_b : t \mapsto (t, \lambda_b(t)) \tag{8}$$

con λ_b stato relativo all'istante considerato.

La funzione σ_b individua una sezione del fibrato termodinamico $\mathcal{S}$.

2. – Un'applicazione agli elementi materiali semplici.

L'autore applica la struttura geometrica sopra citata al caso di un elemento materiale semplice [4]. Gli stati sono dati dal *gradiente di deformazione* $\mathbf{F}$, dall'*energia interna specifica* indicata con u e dal vettore $\beta = -\frac{1}{\mu} grad \frac{1}{\theta}$, dove μ è la *densità di massa* e θ la *temperatura*. Si considerano deformazioni omogenee, che siano quindi indipendenti dai punti materiali e dipendano solo dal tempo. Il processo è così definito:

$$P_t(\tau) = [\mathbf{L}(\tau),\, h(\tau),\, \gamma(\tau)] \tag{9}$$

dove $\mathbf{L}$ è il valore istantaneo del gradiente di velocità, $\gamma = \dot{\beta}$, $h = -\frac{1}{\mu} div\, \mathbf{q}$ e $\mathbf{q}$ è il vettore flusso di calore. Vengono, inoltre, introdotti dei campi stazionari sul fibrato termodinamico $R \times B$, cioè il *campo dello stress*:

$$\mathbf{T} : R \times B \rightarrow Sym(\mathcal{V}) \tag{10}$$

e della temperatura assoluta

$$\theta : R \times B \to R^{++} \tag{11}$$

Le equazioni differenziali che caratterizzano il sistema sono:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{F}}(\tau) = \mathbf{L}(\tau)\, \mathbf{F}(\tau) \\ \dot{u}(\tau) = \mathbf{T}(\mathbf{b}) \cdot \mathbf{L}(\tau) + h(\tau) \\ \dot{\beta}(\tau) = \gamma(\tau). \end{cases} \tag{12}$$

Queste, in realtà, determinano un morfismo lineare $\mathbf{G} : TB \to TB$ sul fibrato tangente TB, ovvero:

$$\mathbf{G} : (\mathbf{F}, u, \beta, \mathbf{L}, h, \gamma) \mapsto (\mathbf{F}, u, \beta, \dot{\mathbf{F}}, \dot{u}, \dot{\beta}) \tag{13}$$

Sul *fibrato delle evoluzioni*, $R \times TB$, si definisce una funzione reale, detta «*funzione entropia*», ponendo:

$$s(\varrho_t, b, t) = \int_0^t \frac{h(\tau)}{\theta[b(\tau)]} d\tau + \int_0^t \mathbf{q}[b(\tau)] \cdot \beta(\tau)\, d\tau \tag{14}$$

in modo che nel fibrato termodinamico $R \times B$ risulti anche definita una 1- forma Ω_s, detta «1-*forma entropia*», il cui integrale lungo ogni curva σ soluzione delle (12) dia esattamente s, definita come segue:

$$\Omega_s = -\frac{\mathbf{TF}^{-1}}{\theta} d\mathbf{F} + \frac{1}{\theta} du + \mathbf{q} \cdot \beta dt \tag{15}$$

Applicando l'operatore di differenziale esterno alla 1-forma e utilizzando le proprietà naturali del differenziale esterno si ricavano le seguenti espressioni: $\partial_{\mathbf{F}}\left[\frac{1}{\theta}\right] = \partial_u\left[-\frac{\mathbf{TF}^{-1}}{\theta}\right]$, $\partial_t\left[\frac{-\mathbf{TF}^{-1}}{\theta}\right] = \partial_{\mathbf{F}}[\mathbf{q} \cdot \beta]$, $\partial_t\left[\frac{1}{\theta}\right] = \partial_u[\mathbf{q} \cdot \beta]$, $0 = \partial_\beta\left[\frac{-\mathbf{TF}^{-1}}{\theta}\right]$, $0 = \partial_\beta\left[\frac{1}{\theta}\right]$, $0 = \partial_\beta[\mathbf{q} \cdot \beta]$.

Queste relazioni danno una condizione necessaria per l'esistenza della funzione entropia durante il processo analizzato.

3. – Il caso delle variabili interne.

In molti casi importanti dal punto di vista fisico, un sistema termodinamico non può essere considerato in equilibrio locale e perciò la descrizione della sua evoluzione richiede un'estensione della termodinamica classica, ad esempio mediante l'introduzione di ulteriori variabili, con il ruolo di *variabili dinamiche*, che vengano considerate nei fenomeni dissipativi che possono svilupparsi durante l'evoluzione.

Se uno di questi campi aggiuntivi non è facilmente misurabile si dice che si tratta di una *variabile interna*. L'autore considera, inoltre, un elemento materiale sottoposto a processi irreversibili fuori dall'equilibrio caratterizzandolo spazialmente da una variabile interna α. Si suppone che il flusso dell'entropia e il flusso di calore siano legati da una relazione del tipo:

$$\mathbf{J}^s = \frac{1}{\theta}\mathbf{q} + \mathbf{k} \tag{16}$$

dove $\mathbf{k}$ è la densità dell'extraflusso di entropia che, seguendo Maugin, [3] è così definita: $\mathbf{k} = \frac{1}{\theta}\mathbf{B}\dot{\alpha}$ dove $\mathbf{B} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \nabla \alpha}$ e $\Psi = u - s\theta$ è l'energia libera per unità di volume. Lo spazio degli stati B è ora costituito dalle variabili $(\mathbf{F}, u, \beta, \alpha, \nabla\alpha)$ e il sistema di equazioni risulta così modificato:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{F}}(\tau) = \mathbf{L}(\tau)\,\mathbf{F}(\tau) \\ \dot{u}(\tau) = \mathbf{T}(\mathbf{b})\cdot\mathbf{L}(\tau) + h(\tau) \\ \dot{\beta}(\tau) = \gamma(\tau) \\ \dfrac{\partial \alpha}{\partial t} = -\nabla\cdot\mathbf{J}_\alpha + D_i \nabla^2 \alpha \end{cases} \tag{17}$$

dove D_i è un coefficiente numerico che può essere ricavato in funzione dei coefficienti fenomenologici usando i metodi della Termodinamica del non-equilibrio, ∇^2 è un operatore di diffusione e $\mathbf{J}_\alpha = -D_i \nabla\alpha$.

In maniera analoga al caso degli elementi semplici si trova la seguente espressione per la funzione entropia:

$$s(\varrho_t, b, t) = \int_\sigma -\frac{\mathbf{T}\mathbf{F}^{-1}}{\theta}d\mathbf{F} + \frac{1}{\theta}du + \mathbf{q}\cdot\beta d\tau - \nabla\cdot\left(\frac{1}{\theta}\mathbf{B}\right)d\alpha - \frac{\mathbf{B}}{\theta}d(\nabla\alpha) \tag{18}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] ARNOLD V. I., *Metodi matematici della Meccanica Classica,* Editori Riuniti (1979).

[2] COLEMAN B.D. and OWEN D.R., *A mathematical foundation for thermodynamics,* Arch. Rat. Mech. Anal., **54** (1974), 1-104.

[3] MAUGIN G.A., *Internal Variables and Dissipative Structures,* J. Non-Equilib. Thermodyn., **15** (1990/2), 173-192.

[4] NOLL W., *A new mathematical theory of simple materials,* Arch. Rat. Mech. Anal., **48** (1972).

Dipartimento di Matematica, Università di Messina; e-mail: patrizia@dipmat.unime.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Palermo) - Ciclo IX
Direttore di ricerca: Prof. Vincenzo Ciancio