Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Stefania Bellavia

Metodi Interior Point inesatti per problemi non lineari di complementarietà misti

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1999), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 181–183.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_1S_181_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 2-A Suppl. (1999), pag. 181-183

Metodi Interior Point inesatti per problemi non lineari di complementarietà misti.

STEFANIA BELLAVIA

In questo lavoro vengono studiati metodi Interior Point per la risoluzione di sistemi di equazioni non lineari, con restrizione sul segno delle variabili, di questa forma:

$$H(v, s, z) = \begin{pmatrix} F(v, s, z) \\ SZe \end{pmatrix} = 0 \qquad (s, z) \geq 0 \tag{1}$$

dove $v \in \mathbb{R}^m$, $s, z \in \mathbb{R}^n$, $F: \mathbb{R}^{m+2n}$ in $\mathbb{R}^{m+n}$, $S = diag(s)$, $Z = diag(z)$, $e \in \mathbb{R}^n$ indica il vettore con tutte le componenti uguali ad uno e $(s, z) \geq 0$ indica che tutte le componenti dei vettori s e z sono maggiori od uguali a zero. Tali problemi vengono comunemente detti problemi non lineari di complementarietà misti. L'interesse per lo studio della risoluzione numerica di (1) è motivato dal fatto che problemi di vario tipo, quali problemi non lineari di complementarietà standard, sistemi di equazioni di Karush-Kuhn-Tucker per problemi di programmazione non lineare e disuguaglianze variazionali, possono essere espressi con questa formulazione.

Storicamente, è stata fondamentale la pubblicazione, nel 1984, del lavoro di Karmakar [1], nel quale è stato presentato un nuovo metodo per la risoluzione di problemi di programmazione lineare. A partire dalla pubblicazione di tale lavoro è stata definita una nuova classe di metodi, chiamati metodi Interior Point, la cui crescita ed espansione continua fino ad oggi. Problemi di programmazione non lineare e problemi non lineari di complementarietà di vario tipo sono stati molto recentemente risolti con efficienti tecniche di tipo Interior Point [2]. Per studiare e ampliare l'applicabilità di questi procedimenti va ricordato che essi non sono altro che modificazioni del metodo di Newton, che, applicato alla risoluzione di (1), può presentare difficoltà di convergenza dovute alla presenza del vincolo $(s, z) \geq 0$. La situazione di non convergenza è originata dalla necessità di dover scegliere passi estremamente piccoli nella direzione di movimento individuata dal metodo di Newton per poter mantenere positive le componenti dei vettori s_k e z_k. I metodi Interior Point utilizzano direzioni modificate rispetto a quella data dal metodo di Newton in modo tale da poter effettuare passi sufficientemente grandi, mantenendo i vettori s_k e z_k sufficientemente lontani dalla frontiera dell'ottante positivo di $\mathbb{R}^n$ fino a che l'approssimazione ottenuta non è abbastanza vicina alla soluzione. Dal momento che la direzione di movimento è ottenuta modificando la direzione data dal metodo di Newton i metodi Interior Point sono stati interpretati come metodi di Newton perturbati.

In questo lavoro di tesi i metodi Interior Point per problemi di complementarietà non lineari vengono interpretati come metodi di Newton Inesatti [3] per il corrispondente sistema di equazioni non lineari $H(v, s, z) = 0$. Questa osservazione permette di utilizzare i risultati di convergenza della teoria dei metodi di Newton Inesatti per ottenere nuovi risultati per i metodi Interior Point.

La maggior parte dei risultati di convergenza dei metodi Interior Point presenti in letteratura sono ottenuti supponendo di risolvere esattamente il sistema lineare che fornisce la direzione di movimento. È necessario però tenere presente che quando il problema dato è di grandi dimensioni, il calcolo della soluzione esatta dei sistemi lineari può essere estremamente costoso, ed inoltre, può non essere giustificato quando l'approssimazione corrente è lontana dalla soluzione di (1). Pertanto, per problemi di grandi dimensioni, può essere conveniente utilizzare un metodo iterativo per calcolare una soluzione approssimata dei sistemi lineari.

L'interpretazione dei metodi Interior Point come metodi di Newton Inesatti permette di studiare il caso in cui i sistemi lineari vengano risolti a meno di un certo residuo. Viene quindi naturale l'applicazione dei metodi Interior Point a problemi non lineari di grandi dimensioni estendendo la classe dei metodi Interior Point ai metodi Interior Point inesatti (o troncati) proposti fino ad ora solo per la risoluzione di problemi (1) con $F(v, s, z)$ lineare.

Pertanto, sfruttando la possibilità di interpretare i metodi Interior Point come metodi di Newton Inesatti, viene definito e studiato un metodo Interior Point inesatto per la risoluzione del sistema non lineare (1). Tale metodo è stato chiamato Metodo IIP. I risultati di convergenza ottenuti mostrano che il Metodo IIP è un procedimento a convergenza globale. Infatti, supponendo che la successione generata $\{v_k, s_k, z_k\}$ sia limitata, si è dimostrato che $\|H(v_k, s_k, z_k)\| \to 0$ e pertanto tutti i punti di accumulazione della successione $\{v_k, s_k, z_k\}$ sono soluzione del problema (1). Si è inoltre dimostrato che se almeno un punto di accumulazione (v^*, s^*, z^*) della successione è tale che $H'(v^*, s^*, z^*)$ è invertibile, allora si ha che $\{v_k, s_k, z_k\}$ converge a (v^*, s^*, z^*). Completamente nuovo è anche lo studio del comportamento asintotico del metodo. In particolare si fornisce un criterio per scegliere i parametri presenti nel metodo in modo da ottenere convergenza asintotica superlineare della successione generata.

È stato inoltre studiato un metodo interior point inesatto che nasce come una modificazione del Metodo IIP e che può essere applicato alla risoluzione di problemi non lineari di complementarietà standard monotoni:

$$H(s, z) = \begin{pmatrix} z - f(s) \\ SZe \end{pmatrix} = 0 \qquad (s, z) \geqslant 0\,, \tag{2}$$

dove $s, z \in \mathbb{R}^n$ ed $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, differenziabile con continuità nell'ottante positivo di $\mathbb{R}^n$ e monotona. Tali problemi rientrano tra i problemi del tipo (1) ma sfruttando la loro forma, è stato possibile definire un procedimento più adatto alla loro risoluzione. Si dimostra che tale metodo, chiamato Metodo IIP-NCP, appartiene alla classe dei procedimenti descritti da Kojima *et al.* in [4] e pertanto per questo procedimento valgono i risultati di convergenza globale della successione $s_k^T z_k$ a zero dimostrati in tale lavoro. Questo risultato è completato con la dimostrazione che la successione generata dal metodo converge ad una soluzione di (2) con velocità di convergenza superlineare. È stata infine studiata la complessità del Metodo IIP-NCP sotto l'ipotesi che f soddisfi una condizione di Lipschitz scalata. Sono stati ottenuti due risultati che specificano il comportamento globale del metodo. Se il punto iniziale (s_0, z_0) è un punto ammissibile allora il metodo IIP-NCP ha complessità polinomiale, se invece (s_0, z_0) non è ammissibile il metodo è globalmente linearmente convergente.

Sono infine riportati i risultati numerici con i quali si verificano sperimentalmente le proprietà del Metodo IIP. La sperimentazione è stata effettuata su problemi di complementarietà misti scelti in due ben note collezioni di problemi test.

BIBLIOGRAFIA

[1] KARMAKAR N.K., A new polynomial-time algorithm for linear programming, *Combinatorica*, **4** (1984), 373-395.

[2] EL-BAKRY A.S., TAPIA R.A., TSUCHIYA T. and ZHANG Y., On the Formulation and Theory of the Newton Interior-Point Method for Nonlinear Programming, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **89** (1996), 507-541.

[3] DEMBO R.S., EISENSTAT S.C. and STEIHAUG T., Inexact Newton Methods, *SIAM Journal on Numerical Analysis.*, **19** (1982), 400-408.

[4] KOJIMA M., NOMA T. and YOSHISE A., Global Convergence in Infeasible-Interior-Point algorithms, *Mathematical Programming*, **65** (1994), 43-72.

Dipartimento di Energetica «S. Stecco», Università di Firenze; e-mail: bellavia@ciro.de.unifi.it

Dottorato in Matematica Computazionale ed Informatica Matematica
(sede amministrativa: Padova) - Ciclo X
Relatore: Prof. Ilio Galligani, Università di Bologna
Correlatore: Prof. Maria Macconi, Università di Firenze