Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Ilaria Perugia

Discretizzazione di problemi con vincoli lineari e applicazioni al calcolo scientifico

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1999), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 193–196.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_1S_193_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 2-A Suppl. (1999), pag. 193-196

Discretizzazione di problemi con vincoli lineari e applicazioni al calcolo scientifico.

ILARIA PERUGIA

1. – Introduzione.

Vari problemi di interesse fisico possono essere formulati come minimizzazione di un funzionale, solitamente correlato all'energia del sistema considerato, sotto uno o più vincoli che la soluzione deve soddisfare. Nella tesi è stato considerato il caso particolare di funzionali quadratici con vincoli lineari; in tutte le applicazioni considerate, i vincoli sono rappresentati da equazioni differenziali del primo ordine. L'approccio seguito per lo studio di questa classe di problemi è basato sul metodo dei moltiplicatori di Lagrange: il problema di minimizzazione vincolata può essere riscritto come un problema di punto sella non vincolato, mediante l'introduzione di moltiplicatori di Lagrange associati ai vincoli. In questo modo, il problema è pensato come governato da un principio di equilibrio, anziché da un principio di minimizzazione. Questo è stato il punto di partenza sia per lo studio teorico che per l'approssimazione numerica. Le applicazioni considerate provengono da differenti settori applicativi: meccanica dei fluidi, meccanica strutturale e elettromagnetismo. Per ognuno dei problemi considerati è stata scritta una formulazione variazionale mista, sviluppandone lo studio dal punto di vista teorico (esistenza e unicità della soluzione e dipendenza continua dai dati), e sono state studiate discretizzazioni mediante metodi agli elementi finiti. Per il quadro teorico generale in cui si collocano i metodi studiati, vedere [2].

2. – Problema di Stokes.

È stata proposta e studiata, dal punto di vista della stabilità numerica e stima dell'errore, una nuova classe di elementi finiti su quadrilateri piani, elementi finiti che richiedono un numero minore di gradi di libertà della nota famiglia $Q_k \times P_{k-1}^{\mathrm{disc}}$, senza perdita di stabilità e di accuratezza. La famiglia è quella che si ottiene conservando le stesse pressioni, ma utilizzando per le velocità lo spazio $Q_k \cap P_{k+2}$.

3. – Piastre di Reissner-Mindlin e piastre piezoelettriche.

Una scelta analoga di elementi finiti è stata applicata per la discretizzazione delle rotazioni delle fibre nel modello bidimensionale di Reissner-Mindlin, nel quadro dei metodi agli elementi finiti MITC [1], fornendo anche in questo caso una approssimazione stabile e convergente in modo ottimale. È stato inoltre formulato un modello bidimensionale per le piastre piezoelettriche di Reissner-Mindlin, dimostrando un teorema di esistenza e unicità (per mezzo del Lemma di Lax-Milgram) e proponendo una discretizzazione con elementi finiti conformi, oltre che presentando di altri possibili modelli discreti aventi la stessa accuratezza, ma migliori prestazioni nel caso di piastre molto sottili.

4. – Problema della cavità risonante.

È stato studiato il problema dell'approssimazione numerica mediante elementi finiti di un problema agli autovalori relativo alle equazioni di Maxwell applicate al problema della cavità risonante. L'eliminazione del vincolo di divergenza nulla porta ad un problema il cui operatore associato non è compatto, aggiungendo un autospazio di dimensione infinita corrispondente alla frequenza nulla. Benchè questo autospazio non abbia significato fisico, è comunque necessario che sia accuratamente approssimato, per evitare l'inquinamento dell'intero spettro. Riscrivendo il problema in una formulazione mista equivalente, si è dimostrata l'efficacia degli elementi finiti di tipo *edge* sia nell'approssimazione dell'autospazio associato alla frequenza nulla, che dei modi fisici.

5. – Problema magnetostatico.

La parte più corposa della tesi è dedicata allo studio di una formulazione mista del problema magnetostatico, innovativa rispetto agli schemi noti nella letteratura (quasi esclusivamente ingegneristica) realtiva all'elettromagnetismo computazionale. Le equazioni che governano la magnetostatica sono ottenute trascurando le derivate temporali nelle equazioni di Maxwell. Data una densità di corrente $\mathbf{J}$, il campo di induzione magnetica $\mathbf{B}$ ed il campo magnetico $\mathbf{H}$ soddisfano le equazioni canoniche $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ e $\operatorname{curl}\mathbf{H} = \mathbf{J}$, mentre la legge costitutiva $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ esprime le proprietà dei materiali e stabilisce il legame tra i due campi. La componente normale di $\mathbf{B}$ e la compomente tangenziale di $\mathbf{H}$ possono essere discontinue attraverso superdicie di separazione tra diversi materiali.

La maggior parte delle formulazioni per lo studio e l'approssimazione numerica dei problemi magnetostatici si basa sull'utilizzo dei potenziali magnetici scalari totale e ridotto o del potenziale vettore magnetico, anche se recentemente sono state introdotte formulazioni direttamente basate sui campi magnetico e di induzione magnetica. In tutti questo approcci, solo una delle due equazioni canoniche viene imposta esattamente, insieme a una delle due possibili forme della legge costitutiva, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ o $\mathbf{H} = \mu^{-1}\mathbf{B}$; l'equazione canonica restante viene invece imposta solo in forma debole, e la corretta proprietà di continuità del campo corrispondente non viene rispettata dalla soluzione numerica.

Un approccio differente è stato proposto in [4], dove i campi **B** ed **H** sono pensati come soluzioni di due formulazioni complementari. Il metodo proposto si basa sulla minimizzazione di un funzionale legato al residuo dell'equazione costitutiva, mentre le equazioni canoniche sono imposte mediante l'introduzione di potenziali. Tale procedura consente l'esatta imposizione delle equazioni canoniche e delle corrette continuità per entrambi i campi **B** ed **H**. Sotto particolari ipotesi sulle condizioni al contorno, è possibile ottenere due problemi disaccoppiati, uno in **B** ed uno in **H**. Le forme di Whitney sono state introdotte in elettromagnetismo computazionale in [3], collocando i problemi elettromagnetici nel quadro teorico del complesso di De Rham, pensando i campi come forme differenziali, anzichè come funzioni vettoriali. Le formulazioni duali introdotte in [4] si collocano perfettamente in questo quadro, ed ognuno dei campi incogniti può essere discretizzato mediante le funzioni di interpolazione più adatte nel complesso di Whitney, cioè *face* per **B**, *edge* per **H** e per il potenziale vettorre, *nodali* per il potenziale scalare.

L'approccio studiato nella tesi consiste nel minimizzare il residuo nel soddisfacimento della legge costitutiva magnetica $\frac{1}{2}\int_\Omega \mu^{-1}\,|\mathbf{B}-\mu\mathbf{H}|^2\,dx$, imponendo i vincoli rappresentati dalle equazioni canoniche mediante l'introduzione di moltiplicatori di Lagrange, ottenendo un problema di punto sella che è possibile scrivere in formulazione variazionale mista, in cui entrambi **B** ed **H** compaiono come incognite. Considerando un dominio computazionale limitato Ω, con bordo connesso $\Gamma = \Gamma_B \cup \Gamma_H$, su cui sono imposti differenti tipi di condizioni al contorno, la formulazione risultante per il problema nel caso tridimensionale è la seguente: dato $\mathbf{J} \in H_{\Gamma_H}(\mathrm{div}^0;\, \Omega)$, $\widetilde{\mathbf{B}} \in H(div;\, \Omega)$ tale che $\widetilde{\mathbf{B}}\cdot\mathbf{n} = f_B$ su Γ_B e $\widetilde{\mathbf{H}} \in H(\mathrm{curl};\, \Omega)$ tale che $\widetilde{\mathbf{H}} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{f}_H$ su Γ_H, trovare $(\mathbf{B}, \mathbf{H}, \xi, \boldsymbol{\Omega})$ tale che $(\mathbf{B}-\widetilde{\mathbf{B}}, \mathbf{H}-\widetilde{\mathbf{H}}, \xi, \boldsymbol{\varphi}) \in H_{\Gamma_B}(\mathrm{div};\, \Omega) \times H_{\Gamma_H}(\mathrm{curl};\, \Omega) \times L^2(\Omega) \times H_{\Gamma_H}(\mathrm{div}^0;\, \Omega)$, e

$$i)\ \int_\Omega \mu^{-1}\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}^*\,dx - \int_\Omega \mathbf{H}\cdot\mathbf{B}^*\,dx + \int_\Omega \mu^{-1}\xi\,\mathrm{div}\,\mathbf{B}^*\,dx = 0 \quad \forall\mathbf{B}^* \in H_{\Gamma_B}(\mathrm{div};\, \Omega)$$

$$ii)\ -\int_\Omega \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}^*\,dx + \int_\Omega \mu\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^*\,dx + \int_\Omega \mu\boldsymbol{\varphi}\cdot\mathrm{curl}\,\mathbf{H}^*\,dx = 0 \quad \forall\mathbf{H}^* \in H_{\Gamma_H}(\mathrm{curl};\, \Omega)$$

$$\int_\Omega \mu^{-1}\,\mathrm{div}\,\mathbf{B}\xi^*\,dx = 0 \quad \forall\xi^* \in L^2(\Omega)$$

$$\int_\Omega \mu\mathrm{curl}\,\mathbf{H}\cdot\varphi^*\,dx = \int_\Omega \mu\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\varphi}\varphi^*\,dx \quad \forall\boldsymbol{\varphi}\varphi^* \in H_{\Gamma_H}(\mathrm{div}^0;\, \Omega)$$

(i pedici che compaiono in $H_{\Gamma_B}(\mathrm{div};\, \Omega)$, $H_{\Gamma_H}(\mathrm{curl};\, \Omega)$ e $H_{\Gamma_H}(\mathrm{div}^0;\, \Omega)$ indicano le parti del bordo su cui sono assegnate condizioni al contorno omogenee). In questo modo, sia **B** che **H** potranno essere discretizzati mediante le classi opportune di elementi finiti (elementi *face* per **B** ed *edge* per **H**). Il vantaggio rispetto all'introduzione dei potenziali consiste nella possibilità di trattare problemi sotto ipotesi più generali sui domini e sulle condizioni al contorno. I risultati numerici presentati mostrano buona accuratezza dell'approssimazione su un'ampia casistica di problemi. In particolare, tale approccio fornisce migliori risultati rispetto ai metodi più tradizionali in presenza di forti discontinuità delle proprietà magnetiche dei materiali, come spesso si ha nei problemi concreti. L'analisi della formulazione e della sua discretizzazione mediante elementi finiti di tipo misto è stata condotta sia nel caso bidimensionale che nel caso tridimensionale, che non è banale estensione del precedente, in quanto occorre imporre un vincolo aggiuntivo, problema che nella tesi è stato affrontato introducendo un ulteriore moltiplicatore di Lagrange, richiededo un'analisi specifica della nuova formulazione. Sono stati inoltre analizzati i problemi algebrici cui si giunge con le discretizzazioni proposte. Il probelma è interessante dal punto di vista dell'algebra lineare computazionale, in quanto il sistema lineare risultante ha matrice simmetrica ma indefinita, il che rende inapplicabile la maggior parte degli schemi più classici. Sono stati presentati risultati ottenuti mediante metodi diretti e metodi iterativi opportunamente precondizionati, discutendone le performances su modelli specifici bidimensionali e tridimensionali, mostrando che nel caso bidimensionale il sistema lineare può essere risolto in modo efficiente utilizzando opportune varianti di tali metodi. L'analisi ci campo ottenuta formulazione si è inoltre rivelata particolarmente adatta nel calcolo della forza magnetica mediante il metodo del tensore di Maxwell, come mostrato nei risultati riportati.

BIBLIOGRAFIA

[1] Brezzi F., Bathe K.-J. and Fortin M., *Mixed-interpolated elements for Reissner-Mindlin plates*, Internat. J. Numer. Methods Engrg., **28** (1989), 1787-1801.

[2] Brezzi F. and Fortin M., **Mixed and Hybrid Finite Element Methods**, Springer-Verlag, New York (1988).

[3] Bossavit A., *A rationale for edge-elements in 3D fields computation*, IEEE Trans. on Magnetics, **24** (1988), 74-79.

[4] Rikabi J., Bryant C. F. and Freeman E. M., *An error-based approach to complementary formulations of static field solutions*, Internat. J. Numer. Methods Engrg., **26** (1988), 1963-1987.

Dipartimento di Matematica, Università di Pavia; e-mail: perugia@dimat.unipv.it
Dottorato in Matematica Computazionale e Ricerca Operativa
(sede amministrativa: Università di Milano) - Ciclo IX
Direttore di ricerca: Prof. Franco Brezzi, Università di Pavia