Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Maria Lucia Sampoli

Schemi risolutivi per la costruzione di curve interpolanti vincolate

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1999), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 197–200.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_1S_197_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 2-A Suppl. (1999), pag. 197-200

Schemi risolutivi per la costruzione di curve interpolanti vincolate.

Maria Lucia Sampoli

Negli ultimi decenni il problema di una efficiente rappresentazione di curve e superfici ha dato luogo ad una viva attività di ricerca. Tale problema infatti riveste un ruolo cruciale nella progettazione di una grande varietà di prodotti industriali, quali carrozzerie di automobili, scafi di navi, fusoliere di aereoplani, ed anche nella descrizione di fenomeni di natura geologica, fisica e medica.

La definizione e lo sviluppo di modelli matematici che possano descrivere tali oggetti o fenomeni reali e la messa a punto di algoritmi che permettano che tale operazione venga effettuata in modo efficiente dal punto di vista computazionale costituisce il settore di ricerca della *Computer Aided Geometric Design.*

A questo proposito lo studio dei problemi dell'interpolazione e dell' approssimazione *vincolata* ha ricevuto negli ultimi anni un notevole impulso, ed in questo ambito va collocato lo studio della costruzione di curve interpolanti sottoposte a vincoli. Tale impulso è motivato dal fatto che in molte applicazioni è richiesta la costruzione di una curva che soddisfi non solo le classiche condizioni di passaggio per determinati punti (interpolazione), ma anche altri requisiti dettati dal contesto in cui la curva viene costruita.

Per esempio, nelle applicazioni industriali le «linee caratteristiche» del tetto di una automobile non dovrebbero avere gobbe o variazioni brusche, ma piuttosto essere convesse e variare dolcemente, oppure la rete di curve che definisce la supeficie della coda di un aereoplano non dovrebbe presentare delle oscillazioni che potrebbero inficiare le proprietà aereodinamiche della superficie risultante. In questi casi i vincoli sono dati dall'imporre la regolartà delle curve (*smoothing*) ed il mantenimento della forma (*shape-preserving*). Inoltre, quando dobbiamo interpolare un insieme di dati desunti da misure sperimentali, alcuni di essi possono essere affetti da errore, per cui se ne conosce solamente un intervallo di variabilità. Questo tipo di situazione dà origine ai cossiddetti problemi di interapprossimazione, dove oltre alle condizioni di interpolazione bisogna soddisfare anche vincoli che tengano conto delle regioni di variabilità. Infine nella riproduzione su mappe topografiche di particolari zone del territorio o nella ricostruzione di funzioni che descrivono un fenomeno chimico o fisico è importante interpolare i dati a disposizione in modo tale che la funzione risultante mantenga il comportamento *qualitativo* dei dati sperimentali, conservando, per esempio la monotonia o la positività dei dati stessi.

In questo lavoro di tesi viene studiato il problema della costruzione di funzioni e curve parametriche interpolanti dati assegnati e soggette a vincoli. La tesi è costituita da due parti. Nella prima parte vengono considerati alcuni problemi matematici particolari e per ciascuno di essi viene proposto un nuovo metodo risolutivo ed un algoritmo per una sua efficiente implementazione. Nella seconda parte

viene sviluppata una teoria generale che permetta di risolvere con lo stesso schema (usualmente chiamato *schema astratto*) problemi differenti. In particolare viene presentato un nuovo schema astratto, che può essere applicato ad una grande varietà di problemi di interpolazione vincolata.
Più in dettaglio, nell'ambito degli schemi *ad hoc*, viene studiato un problema di interpolazione funzionale con vincoli di forma e viene presentato un nuovo schema locale per l'interpolazione alla Hermite comonotona, con continuità C^1 (vedi anche [7]). La funzione risultante $s(x)$ è costruita mediante tecniche parametriche, considerando il grafico della funzione $x \to s(x)$ come sostegno di una curva parametrica, $(x(t), y(t))$, dove $x(t)$ è strettamente crescente. In particolare viene studiato il caso in cui la prima componente è data da una funzione quadratica a tratti, mentre la seconda da una funzione cubica; in questo modo si ha la semplicità strutturale delle funzioni quadratiche, mantenendo il buon ordine di approssimazione delle cubiche. A questo proposito il risultato principale dimostrato è dato dal seguente teorema:

TEOREMA 1. – *Sia* $f \in C^l[x_i, x_{i+1}]$, $l = 2, 3$, *monotona crescente. La funzione* $s(x)$ *costruita con lo schema proposto è comonotona con i dati ed esistono delle costanti* K_l, dipendenti da f, *tali che*

$$|s(x) - f(x)| \leq K_l h_i^l, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad 0 \leq i \leq n-1, \quad l = 2, 3.$$

Inoltre se $f \in C^4[x_0, x_n]$ *è montona crescente in* $[x_i, x_{i+1}]$, tale che se $f'(\xi) = f^{(2)}(\xi) = f^{(3)}(\xi) = f^{(4)}(\xi) = 0$, $\xi \in [x_0, x_n]$, *esistono delle costanti posivive* $\delta_\xi < 1$, C^+, C^-, *e* $s, r \geq 3$, *per cui si ha* $C^-(x-\xi)^s \leq f'(x) \leq C^+(x-\xi)^s$, per $x \in [\xi, \xi + \delta_\xi)$, e $C^-(\xi - x)^r \leq f'(x) \leq C^+(\xi - x)^r$, per $x \in (\xi - \delta_\xi, \xi]$.

Allora, per $h_i \to 0$, *esite una costante* K, *dipendente da* f, *tale che*

$$|s(x) - f(x)| \leq K h_i^4, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad 0 \leq i \leq n-1\,;$$

Il metodo proposto fornisce delle soluzioni che soddisfano anche dei requisiti estetici (*visually pleasentness*) e la cui forma può essere facilmente controllata mediante alcuni parametri significativi. Infine viene presentato un algoritmo locale per la determinazione di tali soluzioni.

Il secondo problema analizzato è dato dal problema dell'interapprossimazione che consiste nel costruire una curva che interpoli determinati punti assegnati e «attraversi» alcune regioni assegnate. Viene dimostrato come questo tipo di problemi può in effetti essere ricondotto ad un problema di interpolazione vincolata, dove i vincoli sono determinati dalle regioni di approssimazione. In particolare viene studiato il caso della costruzione di curve parametriche nel piano e nello spazio mediante l'uso di funzioni B-splines non uniformi e viene proposto un nuovo metodo in cui la curva risultante è ottenuta mediante la minimizzazione di un opportuno funzionale di *fairness*, che può essere interpretato come l'*energia* elastica associata alla curva. Così facendo, anche in questo caso, le soluzioni soddisferanno anche il fatto di essere *visually pleasing*.

Infine l'ultimo metodo *ad hoc* presentato costituisce un nuovo approccio per la costruzione di curve parametriche interpolanti nello spazio, che abbiano la continuità del vettore tangente e del vettore curvatura (usualmente queste condizioni sono riassunte con il termine di continuità G^2), requisiti che sono molto importanti nelle applicazioni industriali. Inoltre lo schema proposto dà luogo ad una curva che mantiene l'andamento dei dati (*shape preserving*), nel senso che riproduce la convessità e le inflessioni che sono suggerite dai dati. La curva risultante è espressa mediante una funzione a tratti parametrica cubica e razionale ed è ottenuta come soluzione di un problema di ottimizzazione vincolata i cui vincoli sono appunto dati dalle condizioni sopra imposte. Anche in questo caso viene proposto un algoritmo completamente automatico, che seleziona tra le soluzioni possibili quella che soddisfa anche dei requisiti estetici ([5]).

Dagli esempi numerici proposti si può vedere come i metodi presentati siano in effetti efficienti e diano risultati soddisfacenti quando sono applicati alla classe di problemi per i quali sono stati costruiti, ma, come qualsiasi altro metodo *ad hoc*, hanno lo svantaggio di essere difficilmente applicabili ad un altro tipo di problema, anche se sempre di interpolazione vincolata.

D'altro canto, si può osservare come la maggior parte degli schemi costruiti per risolvere problemi di interpolazione vincolata seguano una procedura comune che può essere messa in evidenza per la formulazione di un approccio unitario adattabile ed applicabile anche a problemi differenti. Questo approccio unitario è appunto rappresentato da schemi detti astratti, dove il termine *astratto* non significa una generalizzazione a spazi astratti, ma piuttosto si riferisce all'obiettivo di sviluppare una teoria che possa dare una struttura comune in cui ogni singolo problema possa essere inquadrato.

I primi schemi astratti sono stati sviluppati alcuni anni fa in [6] e indipendentemente in [2] e [3]. In tali lavori viene presentato uno schema astratto per la costruzione di funzioni monovariate soggette a vincoli separabili. Nonostante che questo schema algoritmico sia stato formalizzato in modo generale, la sua applicabilità pratica è limitata a problemi *ad un solo parametro*, cioè, dato che la costruzione è sempre fatta mediante funzioni a tratti, a problemi in cui si abbia un solo parametro associato ad ogni nodo (due per ogni tratto). Questa limitazione consente di applicare tale schema solo a problemi di interpolazione funzionale, ma non, ad esempio, a problemi di interpolazione parametrica, che invece costituiscono uno dei campi più attivi di ricerca nell'ambito della Computer Aided Geometric Design.

Scopo della seconda parte del lavoro di tesi è pertanto quello di sviluppare una nuova teoria e mettere a punto un nuovo schema astratto che possa essere applicato a problemi con più parametri. In particolare viene studiato il caso di problemi dipendenti da *due parametri*. L'idea alla base del nuovo schema è quello di *dividere* lo spazio delle soluzioni in sottospazi ad una dimensione così da poter applicare i risultati ottenuti nel caso di un solo parametro. Per mettere in relazione i vari sottospazi si sono definite delle appropriate funzioni multivoche ([1]) e si è dimostrato come lo spazio delle soluzioni sia dato dall'intersezione di opportuni sottoinsiemi costruiti come immagini (dirette e inverse) di tali funzioni multivoche.

Nel caso di due parametri (per esempio u e v), chiamato con $\mathbf{D}$ lo spazio globale delle soluzioni e con $\mathbf{DU}$ e $\mathbf{DV}$ la sua proiezione nei due spazi parametrici, e posta Φ la funzione multivoca che li mette in relazione, il risultato *chiave* che è stato dimostrato è dato dal seguente teorema

TEOREMA 2. – *L'insieme* $\mathbf{D}$ *è non vuoto se e solo se* $\Phi(\mathbf{DU}) \cap \mathbf{DV}$ *è non vuoto. Se* $\mathbf{v} \in \Phi(\mathbf{DU}) \cap \mathbf{DV}$ *allora esiste* $u \in \Phi^{-1}(\mathbf{v})$ *tale che* $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in D$.

Il problema è così ricondotto a trovare un punto nell'intersezione di due insiemi opportuni. Si è quindi dimostrato come questo passo possa essere risolto applicando un metodo di proiezioni alternate.

Lo schema proposto è molto generale dal momento che permette di considerare ogni tipo di vincolo e pertanto può essere applicato ad una grande varietà di problemi. Inoltre anche in questo caso può essere considerato un funzionale di *fairness*, che permette di migliorare la forma finale della soluzione.

Nell'ultima parte della tesi viene poi spiegato l'utilizzo del nuovo schema mediante una applicazione al problema della costruzione di curve parametriche interpolanti aventi continuità C^1 e sottoposte a vincoli di forma. In particolare viene considerato l'uso di funzioni spline cubiche ed è messo a punto un algoritmo che viene applicato ad alcuni esempi numerici (vedi [4]).

BIBLIOGRAFIA

[1] AUBIN J. P. and FRANKOWSKA H., *Set-Valued Analysis*, Birkhäuser, Boston (1990).

[2] COSTANTINI P., *On monotone and convex spline interpolation*, Math. Comp., **46** (1986), 203-214.

[3] COSTANTINI P., *An algorithm for computing shape preserving splines of arbitrary degree*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **22** (1988).

[4] COSTANTINI P. and SAMPOLI M. L., *Abstract Schemes and Constrained Curve Interpolation*, Designing and Creating Shape-Preserving Curves and Surfaces, J. Hoschek (ed.) B. G. Teubner, Stuttgart (1998), 121-130.

[5] GOODMAN T. N. T., ONG B. H. and SAMPOLI M. L., *Automatic interpolation by fair, shape-preserving* G^2 *space curves*, Computer Aided Design, **30** (1998), 813-822.

[6] HESS W. and SCHIMDT J. W., *Schwach verkoppelte Ungleichungssysteme und konvexe Spline-Interpolation*, El. Math., **39** (1984), 85-96.

[7] C. MANNI and M. L. SAMPOLI, *Comonotone parametric Hermite interpolation*, Mathematical Methods for Curves and Surfaces II, M. Dahlen, T. Lyche and L.L. Schumaker (eds.), Vanderbilt University Press, Nashville (1998), 343–350.

Dipartimento di Matematica, Università di Siena; e-mail: sampoli@fonty.unifi.it
Dottorato in Matematica Computazionale e Ricerca Operativa
(sede amministrativa: Università di Milano) - Ciclo X
Direttore di Ricerca: Prof. P. Costantini, Università di Siena
Prof. M.T. Bozzini, Università di Milano