

---

# BOLLETTINO

# UNIONE MATEMATICA ITALIANA

*Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura*

---

ALESSANDRO VENEZIANI

## Modellazione matematico-numerica di problemi relativi al flusso sanguigno

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 2-A—La  
Matematica nella Società e nella Cultura (1999), n.1S (Supplemento  
Tesi di Dottorato), p. 209–212.*

Unione Matematica Italiana

[http://www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_1999\\_8\\_2A\\_1S\\_209\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_1S_209_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>



## Modellazione matematico-numerica di problemi relativi al flusso sanguigno.

ALESSANDRO VENEZIANI

### 1. - Introduzione.

Lo studio del ruolo della emodinamica nella formazione e nello sviluppo di patologie vascolari molto diffuse come l'aterosclerosi è un obiettivo rilevante ed attuale della ricerca cardiovascolare. In questo ambito, sulla base di evidenze sperimentali, è ben noto che le caratteristiche locali del flusso sanguigno in un particolare distretto vascolare (ad esempio la biforcazione carotidea) possono sollecitare risposte patologiche da parte del tessuto endoteliale della parete. Spesso, questo processo porta alla formazione di placche aterosclerotiche, con conseguente riduzione del lume vascolare e, quindi, dell'afflusso di sangue ai distretti periferici.

Da alcuni anni, lo sviluppo della Fluidodinamica Computazionale ha trovato, in questo contesto, un promettente campo di ricerca. Nell'ambito di un problema reso difficile dalla presenza di molti aspetti interagenti fra loro (la dinamica del sangue, la dinamica della parete vascolare, i fenomeni di trasporto di soluti dal sangue alla parete, ecc.), lo sviluppo di tecniche numeriche di indagine si offre come valido complemento (e talvolta alternativa) alle tradizionali tecniche basate su misure sperimentali «in vitro» o «in vivo» (queste ultime necessariamente «invasive» sul paziente). Da un lato, lo studio numerico permette il calcolo accurato di grandezze significative per i fenomeni in esame, tipicamente di non facile misurazione (come lo sforzo di taglio esercitato dal sangue sulla parete); dall'altro, la messa a punto di opportuni algoritmi di ricostruzione tridimensionale delle strutture vascolari a partire da dati clinici (come quelli generati da TAC) permette la simulazione del flusso in geometrie *reali* di pazienti, consentendo una valutazione accurata della situazione effettiva, che, come è facile immaginare, risente significativamente proprio della morfologia individuale.

Queste considerazioni hanno motivato il lavoro della tesi, che possiamo articolare in 3 punti:

- 1) studio e analisi dei modelli matematici del flusso sanguigno;
- 2) sviluppo di tecniche numeriche e di codici per il calcolo numerico del flusso sanguigno;
- 3) sviluppo di algoritmi di ricostruzione delle morfologie vascolari per la simulazione in geometrie reali.

Per brevità, diamo conto qui solo di alcuni risultati relativi ai primi due punti. Per i risultati relativi a simulazioni in geometrie tridimensionali reali, si può far riferimento a [5].

## 2. - Analisi di modelli matematici del flusso sanguigno.

Le patologie vascolari cui si è fatto cenno interessano essenzialmente arterie di medio e grosso calibro, come la biforcazione carotidea, quella renale o l'arteria femorale. Dal punto di vista della modellistica matematica, questo permette di fare alcune semplificazioni. In particolare, il flusso sanguigno nei distretti citati può essere descritto dalle equazioni di Navier-Stokes per un fluido Newtoniano incomprimibile. Pertanto, indicando con  $\Omega$  il distretto vascolare studiato,  $\mathbf{x}$  le coordinate spaziali,  $\nu$  la viscosità cinematica del fluido,  $\mathbf{f}$  un termine forzante, le equazioni che descrivono i campi di velocità  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  e pressione  $p(\mathbf{x}, t)$  sono:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases}$$

per  $\mathbf{x} \in \Omega$  e  $t > 0$ . L'analisi circa la buona posizione del problema dato dalle equazioni (1), in cui si assegnino i campi di velocità  $\mathbf{u}_0$  per  $t = 0$  e  $\mathbf{u}_{\partial\Omega}$  sul bordo del dominio, è ben nota. Nel caso in oggetto, però, le condizioni al bordo sulla velocità, benché matematicamente ben fondate, sono praticamente irrealizzabili «in vivo» con gli strumenti di misura attuali. Infatti, se è ragionevole pensare di assegnare la continuità del campo di velocità sull'interfaccia fluido/parete vascolare, sulle sezioni artificiali che delimitano il distretto vascolare rispetto al resto del sistema circolatorio i dati disponibili si riferiscono, tipicamente, a valutazioni «medie», come la *pressione media* o la *portata sanguigna media*. Questi dati non sono sufficienti a rendere ben posto il problema matematico, fornendo solo informazioni mediate sulle sezioni di ingresso e uscita del distretto. Per questo motivo, si rende necessario aggiungere condizioni che permettano di rendere ben posto il problema e, nello stesso tempo, lo perturbino il meno possibile. Una recente proposta (cfr. [1]), in questo contesto, va sotto il nome di approccio «do nothing». L'idea di base consiste nel riformulare il problema in modo variazionale, scegliendo una formulazione opportuna in base ai dati effettivamente disponibili. Le condizioni al bordo naturali associate a tale formulazione sono le condizioni «do-nothing» aggiunte al problema. La risoluzione numerica mediante approccio «do-nothing» di problemi a pressione media imposta sulle sezioni di ingresso e uscita in casi in cui, per la semplicità della geometria di  $\Omega$ , sia disponibile una soluzione analitica, hanno permesso di accertare che, effettivamente, tali condizioni risultano poco perturbative. Generalizzando i risultati in [1], nella tesi si mostra come tutti i problemi di interesse per l'emodinamica numerica si prestino a una formulazione variazionale «do-nothing» generale, la cui buona posizione è stata investigata secondo la tecnica, proposta da Prouse per il problema di Dirichlet in [3], consistente nella riformulazione delle equazioni di Navier-Stokes in una disuguaglianza variazionale. Per maggiori dettagli circa questa parte del lavoro, si può far riferimento anche a [6].

Per quanto concerne lo studio della parete, particolarmente complicato per la natura anisotropa e viscoelastica del tessuto vascolare, è stato proposto un modello semplice per un continuo monodimensionale viscoelastico. È stato affrontato

uno studio preliminare del problema che deriva dall'accoppiamento di questo modello con le equazioni di Navier-Stokes (ulteriori dettagli si trovano in [5]).

### 3. - Sviluppo di metodi di avanzamento in tempo per le equazioni di Navier-Stokes.

Il fenomeno studiato è chiaramente nonstazionario: da un punto di vista numerico, questo richiede la messa a punto di strategie efficienti di avanzamento in tempo per le equazioni di Navier-Stokes (1). Le difficoltà associate alla risoluzione numerica di questo problema risiedono nella sua natura «saddle-point», ove la pressione gioca il ruolo di moltiplicatore di Lagrange del vincolo di incomprimibilità, nonché nelle grandi dimensioni del sistema lineare ottenuto dopo opportune discretizzazione in spazio e in tempo e linearizzazione delle equazioni (1) (cfr. ad es. [4]). Tale sistema ha la forma:

$$(2) \quad A\mathbf{y}^{n+1} = \mathbf{b}^{n+1} \quad \text{con } A = \begin{bmatrix} C & D^T \\ D & 0 \end{bmatrix}.$$

Nella tesi, traendo spunto da un lavoro di Perot [2], è stata proposta una forma generale per ridurre lo sforzo computazionale mediante decomposizione a blocchi  $LU$  della matrice  $A$ . Più concretamente, si osserva che la matrice  $A$  ammette la decomposizione a blocchi  $LU$ :

$$(3) \quad A = \begin{bmatrix} C & 0 \\ D & -DC^{-1}D^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & C^{-1}D^T \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

che, in linea di principio, consente di risolvere il problema invertendo matrici di dimensioni ridotte rispetto a quella originale in (2). Tuttavia, l'efficacia computazionale di questa decomposizione è fortemente limitata dalla necessità di dover invertire, ad ogni passo, la matrice  $C$ , soprattutto nel blocco (2, 2) della matrice  $L$ . D'altra parte, se si approssima  $C^{-1}$  con matrici facilmente calcolabili, si può ottenere una effettiva riduzione dello sforzo computazionale, senza un sensibile degrado della accuratezza, purché l'errore indotto da tali approssimazioni sia contenuto nei termini dell'errore di discretizzazione. In dettaglio, approssimando  $C^{-1}$  con la matrice  $H_1$  nel blocco (2,2) di  $L$  e con la matrice  $H_2$  nel blocco (1,2) di  $U$ , si ottiene:

$$(4) \quad A_{\text{approx}} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ D & -DH_1G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & H_2G \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & CH_2G \\ D & D(H_2 - H_1)G \end{bmatrix}.$$

Nella tesi sono state considerate diverse scelte per le matrici  $H_1$  e  $H_2$ , osservando che, in questo modo, si possono ottenere, come casi particolari, reinterpretazioni algebriche di metodi di splitting già noti (Chorin-Temam, Chorin-Temam incrementale, Van Kan), nonché metodi nuovi. Fra questi, in particolare, ci si è concentrati sulla scelta:  $H_1 = \Delta t M^{-1}$  e  $H_2 = C^{-1}$ , essendo  $M$  la matrice di massa associata al campo di velocità, che è tipicamente «facile» da invertire e  $\Delta t$  il passo della discretizzazione temporale. Questa scelta porta alla formulazione di uno schema

nuovo, che, pur nascendo come metodo di splitting algebrico, può essere reinterpretato come metodo di *quasi-comprimibilità*, ossia di stabilizzazione mediante (piccola) perturbazione del vincolo di incomprimibilità. La forma esplicita di questo termine perturbativo, (apparentemente) nuovo nella letteratura di questo settore, può essere espressa in funzione della *regolarizzata di Yosida dell'operatore Laplaciano*. Lo studio della accuratezza del metodo ha permesso di accertare formalmente e sperimentalmente che la fattorizzazione non induce un degrado della accuratezza rispetto alla soluzione calcolata senza splitting. Ulteriori dettagli circa le proprietà e le prestazioni numeriche di questo metodo si possono trovare in [4].

**Nota:** La tesi è stata svolta presso il Dipartimento di Matematica «F. Brioschi» del Politecnico di Milano, in collaborazione con il Gruppo di Applicazioni Biomediche del Centro di Ricerche, Sviluppo e Studi Superiori in Sardegna (CRS4) di Cagliari e con il Laboratorio di Bioingegneria dell'Istituto «M. Negri» di Bergamo.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] HEYWOOD J., RANNACHER R. and TUREK S., *Artificial boundaries and flux and pressure conditions for the incompressible Navier-Stokes equations*, Int. J. Num. Meth. Fluids, **22** (1996), 325-352.
- [2] B. PEROT *An analysis of the fractional step method*, J. Comp. Phys., **101** (1993), 51-58.
- [3] G. PROUSE *On an inequality related to the motion, in any dimension, of viscous incompressible fluids*, Rend. Acc. Naz. Lincei, **LXVII**, s. VIII (1979), 191-196, 282-288.
- [4] A. QUARTERONI, F. SALERI and A. VENEZIANI, *Factorization methods for the numerical approximation of Navier-Stokes equations*, submitted to Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.
- [5] A. QUARTERONI, M. TUVERI and A. VENEZIANI *Computational Vascular Fluid Dynamics: Problems, Models and Methods* submitted to Comp. Vis. Science
- [6] A. VENEZIANI *Boundary conditions for blood flow problems* Proc. ENUMATH97, R. Rannacher et al. eds. (1998).

Dipartimento Scientifico-Tecnologico, Università degli Studi di Verona

E-mail: venezian@sci.univr.it

Dottorato in Matematica Computazionale e Ricerca Operativa

(sede amministrativa: Milano) - Ciclo X

Direttore della Ricerca: Prof. Alfio Quarteroni