Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Marianna Dalle Molle

Sulla risolubilità locale di gruppi contenenti un sottogruppo massimale che sia localmente nilpotente

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1999), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 21–23.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_1S_21_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 2-A Suppl. (1999), pag. 21-23

Sulla risolubilità locale di gruppi contenenti un sottogruppo massimale che sia localmente nilpotente.

Marianna Dalle Molle

Nella mia tesi studio gruppi localmente finiti che contengono un sottogruppo massimale localmente nilpotente.

L'obiettivo è quello di trovare condizioni da imporre a tali gruppi al fine di generalizzare il noto teorema di Thompson che afferma:

Un gruppo finito G, con un sottogruppo massimale nilpotente M di ordine dispari, è risolubile (vedi [5]).

Nella dimostrazione, Thompson usa il suo famoso *J-Theorem* per provare la p-nilpotenza (cioè l'esistenza di un p-complemento normale) di G/M_G, per ogni primo $p \in \pi(M/M_G)$, ove $\pi(M/M_G)$ è l'insieme dei primi che dividono l'ordine di qualche elemento di M/M_G, e M_G è il core di M in G. Visto che il suo criterio per la p-nilpotenza non è valido per $p = 2$, viene richiesto che M abbia ordine dispari.

In [4] Janko prova (usando risultati di Deskins, Thompson e Wielandt) che G è risolubile anche quando l'ordine di M è pari, purchè il suo 2-sottogruppo di Sylow abbia classe di nilpotenza al più 2.

L'attenzione per il 2-sottogruppo di Sylow di M è anche dovuta all'esistenza di un controesempio: il gruppo lineare speciale PSL$(2, 17)$ è semplice e contiene un sottogruppo massimale nilpotente isomorfo al 2-gruppo diedrale D_{16}, quindi un 2-sottogruppo con classe di nilpotenza 3.

1. – Gruppi localmente finiti.

In questa sezione viene preso in considerazione il caso generale di un gruppo localmente finito G con un sottogruppo massimale M localmente nilpotente. Bruno e Schur provano in [2], tra le altre cose, che G è risolubile se M soddisfa una delle seguenti condizioni:

(i) M è nilpotente e M/M_G non è un p-gruppo;

(ii) M è nilpotente di classe al più 2;

(iii) M è nilpotente, M/M_G è un p-gruppo con sottogruppo derivato finito e $p \neq 2$.

La chiave per la dimostrazione della locale risolubilità di G è data in un loro risultato, che afferma che G è localmente risolubile se il centro di M non è contenuto in M_G e se G è localmente p-nilpotente, per ogni primo p in $\pi(M/M_G)$. Si devono quindi trovare condizioni da imporre ad M che assicurino la locale p-nilpotenza di G, per ogni $p \in \pi(M/M_G)$. A tale proposito ho provato che:

TEOREMA 1. – *Siano G un gruppo localmente finito ed M un suo sottogruppo massimale localmente nilpotente. Allora G è localmente risolubile se vale una delle seguenti condizioni:*

(i) $|\pi(M/M_G)| > 1$ *e ogni p-sottogruppo di Sylow P di M/M_G è*

(a) *abeliano per finito, oppure*

(b) $P = \gamma_n(P)F$ *per qualche n, con $\gamma_n(P)$ nilpotente e F finito* (*ciò vale, in particolare, se P è nilpotente*);

(ii) *M/M_G è un p-gruppo di Černikov e $p \neq 2$;*

(iii) *M/M_G è un p-gruppo nilpotente ed è regolare o di classe ≤ 2.*

In un lavoro non ancora pubblicato, Bruno e Napolitani provano che il risultato rimane valido anche nel caso in cui M/M_G è un p-gruppo nilpotente e $p \geq 5$.

2. – Gruppi lineari e gruppi lineari finitari.

Nel caso in cui $G \leq \mathrm{GL}(V, K)$ sia un gruppo lineare periodico infinito, Wehrfritz mostra che se M è un sottogruppo massimale localmente nilpotente di G e se il p-sottogruppo di Sylow di M è finito o regolare per $p = \mathrm{char}\,K$, $p \neq 2$, mentre il 2-sottogruppo di Sylow è nilpotente di classe al più 2, allora G è risolubile (vedi [6, Teorema 12.8]). In una nota al teorema, Wehfritz osserva che l'ipotesi sul p-sottogruppo di Sylow di M, per $p = charK$, è probabilmente ridondante. Ciò è provato dal seguente risultato:

TEOREMA 2. – *Siano G un gruppo lineare periodico o finitamente generato, ed M un suo sottogruppo massimale localmente nilpotente tale che M/M_G non è un 2-gruppo oppure è nilpotente di classe al più 2. Allora G è risolubile.*

Il passo successivo è quello di generalizzare i risultati ottenuti per il caso lineare ai gruppi lineari finitari. Ricordo che un gruppo lineare finitario è un sottogruppo di $\mathrm{FGL}(V, K)$, ove $\mathrm{FGL}(V, K)$ è il gruppo delle trasformazioni lineari invertibili g di uno spazio vettoriale V su un campo K tali che $C_V(g)$ ha codimensione finita in V.

Per ottenere per i gruppi lineari finitari risultati analoghi a quelli provati per i gruppi lineari, è necessario imporre condizioni più forti a G ed M. Per esempio ho provato che:

PROPOSIZIONE 1. – *Sia G un sottogruppo periodico di* $\mathrm{FGL}(V, K)$. *Sia M un suo sottogruppo massimale localmente nilpotente tale che ogni rappresentazione transitiva come gruppo di permutazioni finitarie ha grado finito e se M/M_G è un 2-gruppo allora è nilpotente di classe al più 2. Allora G è localmente risolu-*

bile se vale una delle seguenti:

(i) $\operatorname{char} K = 0$;

(ii) $\operatorname{char} K = p$ *e* G *è un* p'*-gruppo;*

(iii) G *è imprimitivo.*

3. – Un esempio di gruppo semplice infinito e localmente finito che contiene sottogruppi massimali localmente nilpotenti.

In questa sezione si prova l'esistenza di un gruppo infinito semplice e localmente finito che ha per ogni primo p un p-sottogruppo che è massimale. Ciò mostra che in generale un gruppo localmente finito con un sottogruppo massimale localmente nilpotente non è necessariamente localmente risolubile (poichè un gruppo localmente risolubile non è semplice). Il gruppo semplice sopra menzionato è il gruppo universale U di Philip Hall, definito come segue: sia G_1 il gruppo simmetrico su 3 elementi; allora G_1 agisce su se stesso via moltiplicazione destra, quindi si immerge tramite la rappresentazione regolare destra in $G_2 = \mathrm{Sym}(G_1)$, il gruppo simmetrico sull'insieme G_1; reiterando il processo si ottiene una catena di gruppi simmetrici $G_1 \leqslant G_2 \leqslant \ldots \leqslant G_n \leqslant \ldots$ e il gruppo universale U è dato dall'unione dei gruppi G_n. Se $P_1 \leqslant P_2 \leqslant \ldots \leqslant P_n \leqslant \ldots$ è una catena di gruppi, ove P_i è un p-sottogruppo di Sylow del gruppo G_i, con p un primo fissato, allora $\bigcup_n P_n$ è un p-sottogruppo di Sylow di U. Si prova che esistono in U catene di p-gruppi di questo tipo con la proprietà che l'unione degli elementi di ogni catena è un sottogruppo massimale in U.

BIBLIOGRAFIA

[1] B. BRUNO and M. DALLE MOLLE, *On local-solvability of groups containing a locally nilpotent maximal subgroup*, Arch. Math., **67** (1996), 441-447.

[2] B. BRUNO and S. E. SCHUUR, *On locally finite groups with a locally nilpotent maximal subgroup*, Arch. Math., **61** (1993), 215-220.

[3] M. DALLE MOLLE, *Sylow p-subgroups which are maximal in the universal locally finite group of Philip Hall*, J. Algebra (in corso di stampa).

[4] Z. JANKO, *Verallgemeinerung eines Satzes von B. Huppert und J. G. Thompson*, Arch. Math., **12** (1961), 280-281.

[5] J. G. THOMPSON, *Finite groups with normal p-complements*, Proc. Sympos. Pure Math., **1** (1959), 1-4.

[6] B. A. F. WEHRFRITZ, *Infinite linear groups*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1973).

Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata
Università di Padova; e-mail: dallemol 23math.unipd.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Padova) - Ciclo IX
Direttore di ricerca: Prof. Federico Menegazzo, Università di Padova