Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Rita Ferraro

Curve di genere massimo in P^5 e risoluzione esplicita di punti doppi isolati di superficie

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1999), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 25–28.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_1S_25_0>

Bollettino dell’Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 2-A Suppl. (1999), pag. 25-28

Curve di genere massimo in $\mathbf{P}^5$ e risoluzione esplicita di punti doppi isolati di superficie.

RITA FERRARO

1. – Curve di genere massimo in $\mathbf{P}^5$.

La prima parte della tesi riguarda la classificazione di curve proiettive ridotte, irriducibili e non degeneri in $\mathbf{P}^5$, di genere massimo rispetto alla condizione di non appartenere a nessuna superficie di grado minore a un dato valore fissato.

Questo argomento si inquadra all'interno di una problematica classica nella teoria delle curve proiettive, e cioè la classificazione di tutti i possibili generi in termini del grado d e della dimensione r dello spazio proiettivo dove le curve sono immerse.

Il Teorema principale in questa teoria è il Teorema di Castelnuovo, 1893. In tale Teorema Castelnuovo trovò una limitazione superiore $G(r, d)$ per il genere aritmetico di una curva ridotta, irriducibile e non degenere di grado d immersa in $\mathbf{P}^r$. Posto $m = \left[\frac{d-1}{r-1}\right]$ e $d = m(r-1) + \varepsilon + 1$ così che $0 \leq \varepsilon \leq r-2$, allora $G(r, d) = \binom{m}{2}(r-1) + m\varepsilon$. Il limite è raggiunto da curve dette curve di Castelnuovo che sono completamente classificate e che stanno su superficie di grado minimo.

Halphen per primo considerò il seguente problema più generale, anche se limitatamente a curve dello spazio ordinario. Egli osservò che curve C in $\mathbf{P}^3$ il cui genere aritmetico è grande rispetto al grado d devono stare su superficie di grado piccolo, e così è naturale far dipendere il limite superiore del genere anche dal minimo grado s delle superficie che contengono C. Halphen (1883) trovò infatti un limite superiore $G(3, d, s)$ per il genere aritmetico di curve in $\mathbf{P}^3$ di grado d che non sono contenute in superficie di grado $< s$, nel caso in cui $d > s(s-1)$ e classificò le curve estremali. Tali curve sono aritmeticamente di Cohen-Macaulay, stanno su superficie di grado s e sono sempre legate a curve piane; la classificazione di tali curve si trova in [3].

In [1] gli autori determinano un limite superiore $G(r, d, s)$ per il genere aritmetico di una curva ridotta, irriducibile, non degenere in $\mathbf{P}^r$, non contenuta in una superficie di grado $< s$, quando $d > \frac{2s}{(r-2)} \prod_{i=1}^{R-2} ((r-1)!\,s)^{\frac{1}{r-1-i}}$. Inoltre dimostrano l'esistenza delle curve estremali, almeno per $d \gg s$. Tali curve devono essere aritmeticamente di Cohen-Macaulay e devono stare su una superficie S di grado s, la cui sezione iperpiana generale Γ è una curva di Castelnuovo in $\mathbf{P}^{r-1}$; per $r > 3$ esse non sono necessariamente legate a curve degeneri come nel caso $r = 3$.

In [2] gli autori classificano per $d > 12s^2$ le curve C di genere massimo $G(4, d, s)$ in $\mathbf{P}^4$; inoltre forniscono un'effettiva costruzione di curve estremali per $d > 12s^2$.

Nella mia tesi classifico le curve $C \subseteq \mathbf{P}^5$ di genere massimo $G(5, d, s)$, per $d >$

$\frac{2s}{3}\prod_{i=1}^{3}(4!\,s)^{\frac{1}{4-i}}$. Inoltre costruisco esempi di curve estremali per i medesimi valori di d e per ogni $s \geq 4$. In $\mathbf{P}^5$ la superficie S sta su una scroll razionale normale X di dimensione tre e grado tre ed è tagliata su di essa da un'ipersuperficie G di grado $w+1=\left[\frac{s-1}{3}\right]+1$. Come per $r=3$ e per $r=4$, la classificazione è fatta in termini della curva C' legata a C nell'intersezione della superficie S con una ipersuperficie F di grado minimo $m+1=\left[\frac{d-1}{s}\right]+1$ passante per C e non per S. Ogni risultato propedeutico ai teoremi di classificazione è invece dimostrato per la curva C'' legata a C nell'intersezione di X, G e F.

La differenza principale con i casi $r=3,4$ è che per $r=5$ la scroll X di dimensione 3 su cui giace la superficie S non è un'intersezione completa, infatti è tagliata da tre ipersuperficie quadriche; in particolare C e C'' non sono più legate da un'intersezione completa in $\mathbf{P}^5$, come lo erano invece in $\mathbf{P}^3$ e in $\mathbf{P}^4$.

La scroll X è una varietà normale e aritmeticamente di Cohen-Macaulay, ma può non essere liscia. Più precisamente X può essere di tre tipi: liscia, cono di vertice un punto su una superficie razionale normale liscia di grado tre in un $\mathbf{P}^4$, e cono di vertice una retta su una cubica gobba in un $\mathbf{P}^3$.

Per X liscia ho applicato la teoria della liaison classica, come è esposta in [4] direttamente su X considerando $C + C\gg$ come intersezione completa in X, e sulla generica sezione iperpiana X_H di X considerando $Z+Z''$ come intersezione completa in X_H (Z e Z'' sono le sezioni iperpiane rispettivamente di C e C'' in X_H).

Se X è singolare non si può applicare la teoria della liaison su X, essenzialmente per il fatto che X non è di Gorenstein. Per ovviare a ciò ho considerato due ipersuperficie quadriche Q_1 e Q_2 nell'ideale omogeneo di X e ho applicato la teoria della liaison per l'intersezione completa $C+C'''$ determinata da G ed F sullo schema di Gorenstein $A=Q_1\cap Q_2$. Per un'opportuna scelta di Q_1 e Q_2 i risultati di liaison tra le curve C e C''' si possono tradurre, con qualche accorgimento tecnico, in risultati di liaison tra C e C''.

In particolare, per ogni tipo di X, i risultati dimostrati al fine della classificazione sono contenuti essenzialmente nella seguente Proposizione chiave, dove H ed R stanno ad indicare rispettivamente le classi di equivalenza lineare di una sezione iperpiana e di una fibra di X, e $\Delta h_Z(n)$ la differenza tra la funzione di Hilbert di Z calcolata in n e $n-1$; tale funzione è nota poichè C ha genere massimo.

PROPOSIZIONE 1.1. – *Per* $i \leq m$, w vale

$$h^0(\mathfrak{I}_{C''|X}(iH+R)) \geq h^1(\mathfrak{I}_{Z|\mathbf{P}^4}(m+w-i)) = \sum_{n=m+w-i+1}^{\infty} \Delta h_Z(n).$$

I teoremi di classificazione sono stati dimostrati, con l'uso della Prop. 1.1, separatamente nei tre casi, anche se il caso X singolare in un punto non si discosta di molto dal caso X liscia, poichè la geometria dei divisori di Weil su X è completamente riconducibile alla geometria dei divisori di Cartier sulla desingolarizzazione $\widetilde{X}$ di X. Il caso X singolare lungo una retta è invece notevolmente più complicato e ha necessitato di una approfondita analisi della geometria, e in particolare della teoria dell'intersezione, dei divisori di Weil su di essa.

Al fine di costruire esempi di curve estremali per ogni valore di d nell'intervallo considerato e per ogni valore di $s \geqslant 4$, il risultato basilare è il seguente Lemma la cui dimostrazione si trova nella tesi:

LEMMA 1.1. – *Se X è liscia o singolare in un punto, allora vale la seguente relazione tra i generi aritmetici:*

$$p_a(C'') = \frac{1}{2}(2p_a(C) + (d'' - d)(m + w - 1) - (m+1)(w+1) + 2\deg(R \cap C''))$$

dove $d'' = \deg C''$.

2. – Explicit Resolutions of Double Point Singularities of Surfaces.

La seconda parte della tesi è completamente indipendente dalla prima. Essa consiste in una precisazione e riformulazione in linguaggio moderno di due note di A.Franchetta («Sui punti doppi isolati delle superficie algebriche», Nota I e II, 1946). In queste note l'autore aveva lo scopo di determinare, per ogni punto doppio, i caratteri delle curve eccezionali della risoluzione delle singolarità; precisamente il loro genere e grado virtuale, la molteplicità con cui compaiono nel divisore eccezionale e la loro connessione.

Oltre agli aspetti formali l'originalità del mio lavoro consiste nell'aver dato una procedura algoritmica per la risoluzione di un punto doppio isolato su una superficie e nell'aver ricondotto la descrizione di tale risoluzione a un problema combinatorico.

Una superficie X con un punto doppio isolato si può sempre esprimere, localmente, come rivestimento doppio $f : X \to Y$ di una superficie liscia Y; e una risoluzione della singolarità di X può essere realizzata risolvendo le singolarità della curva di diramazione B di f tramite una sequenza di scoppiamenti, come è descritto in [5].

Il procedimento usato si può brevemente descrivere come segue. Sia $\pi : Y_1 \to Y$ lo scoppiamento di Y in un punto singolare p della curva B, B_1 la trasformata propria di B in Y_1 ed E il divisore eccezionale. Sia X_1 il ricoprimento doppio di Y_1 ramificato lungo B_1 se m era pari oppure lungo $B_1 + E$ se m era dispari, allora X_1 è una superficie normale che domina Y e dà una parziale risoluzione del punto doppio della superficie. Si è ora passati al ricoprimento doppio $X_1 \to Y_1$ e si può iterare il procedimento, continuando a scoppiare la trasformata propria della curva di diramazione in ogni suo punto singolare, e normalizzando poi l'equazione del ricoprimento doppio.

Al passo k in cui la trasformata propria B_k della curva di diramazione è liscia le singolarità del luogo totale di diramazione possono essere di due tipi: intersezioni della B_k con delle curve eccezionali E_i facenti parte del luogo di diramazione e intersezioni tra due curve eccezionali facenti entrambe parte del luogo di diramazione. A questo punto si scoppia fino ad ottenere, al passo n, il luogo totale di diramazione liscio. Il corrispondente ricoprimento doppio f_n: $X_n \to Y_n$ è liscio e X_n è detta risoluzione canonica di X; i divisori $F_i = f_n^{-1}(E_i)$ per ogni i sono i divisori eccezionali della risoluzione canonica.

Nella tesi descrivo completamente la risoluzione canonica $X_n \to X$ in termini di invarianti combinatorici definiti ad ogni passo della procedura algoritmica. Questi invarianti determinano ad ogni passo della procedura il passo successivo, descrivono completamente ogni tipo di singolarità e sono determinati dalla matrice $S_l = ((E_i \cdot E_j)_l)$ delle intersezione dei divisori eccezionali nella superficie Y_l ad ogni passo l, e dai divisori $D_i = B_{l|E_i}$ delle intersezioni della trasformata propria B_l su Y_l con ogni divisore eccezionale E_i per $l \geq k$. La descrizione della risoluzione canonica è dunque totalmente riconducibile alla matrice S_n e ai divisori D_i.

In particolare, nella descrizione ho determinato una formula esplicita per il ciclo fondamentale della risoluzione, ovvero il più piccolo ciclo positivo $Z = \sum_{i=1}^{n} r_i F_i$ supportato nei divisori eccezionali F_i della risoluzione, tale che $Z \cdot F_j \leq 0$ per ogni j. Il ciclo fondamentale ha la proprietà che il suo genere aritmetico è sempre non negativo, ed è nullo se e solo se la singolarità è razionale. Da tale formula si ricava quella per il genere aritmetico del ciclo fondamentale da cui segue che tale genere è maggiore o uguale a zero ed è zero se e solo se ogni F_i è razionale con autointersezione -2; ritrovando così una delle possibili caratterizzazioni dei punti doppi razionali.

Da ultimo ho dimostrato una formula per il «divisore delle condizioni di aggiunzione». Tale divisore misura la differenza tra il sistema lineare $K_{Y_n} + \frac{1}{2}\overline{B_n}$ e il pullback $\pi^*(K_Y + \frac{1}{2}B)$ del sistema lineare aggiunto $K_Y + \frac{1}{2}B$, dove $\overline{B_n}$ è il luogo totale di diramazione in Y_n e $\pi : Y_n \to Y$ è la sequenza di scoppiamenti. Dalla formula si vede che il divisore delle condizioni di aggiunzione è effettivo ed è nullo se e solo se la risoluzione è razionale.

BIBLIOGRAFIA

[1] CHIANTINI L., CILIBERTO C. and DI GENNARO V., *The genus of projective curves*, Duke Math. J., **50**, **70**, 2 (1993), 229-245.

[2] CHIANTINI L.and CILIBERTO C, *Curves of maximal genus in P^4*, Proceedings Zero-dimensional-schemes, Ravello, 1992, De Gruyter (1994).

[3] GRUSON and PESKIN, *Genre des courbes de l'espace projectif*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., **15** (1982).

[4] PESKIN C. and SZPIRO L., *Liaison des variéetés algébriques (I)*, Invent. Math., **26** (1974), 205-217.

[5] BARTH W., PETERS C. and VAN DE VEN A., *Compact Complex Surfaces*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer Verlag, **3**, **4** (1984)

Dipartimento di Matematica, Università di Roma «Tor Vergata»
e-mail: ferraro@axp.mat.uniroma2.it

Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Roma «Tor Vergata») - Ciclo IX
Direttore di ricerca: Prof. Ciro Ciliberto, Università di Roma «Tor Vergata»
Correlatore: Prof. Rick Miranda, Colorado University in Fort Collins