Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Mariagnese Giusto

Topologia, Analisi e Reverse Mathematics

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1999), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 37–40.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_1S_37_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 2-A Suppl. (1999), pag. 37-40

Topologia, Analisi e Reverse Mathematics.

MARIAGNESE GIUSTO

1. – Introduzione.

Questa tesi studia alcuni risultati di Topologia e di Analisi dal punto di vista di un programma noto con il nome di *reverse mathematics* iniziato negli anni '70 da Harvey Friedman e Stephen Simpson. Il suo scopo è quello di individuare il sottosistema dell'aritmetica del second'ordine Z_2 necessario e sufficiente per provare un teorema di matematica «ordinaria». Noi siamo interessati a frammenti di Z_2, ponendo delle limitazioni sugli assiomi di esistenza di insiemi. In molti casi si riesce a provare che un particolare teorema è equivalente al sistema di assiomi che sono stati necessari per dimostrarlo (*reversal*) fornendo così una classificazione della forza assiomatica dei diversi enunciati matematici.

Abbiamo lavorato principalmente nei sottosistemi di Z_2 noti come RCA_0, WKL_0, WKL_0, e ACA_0; essi usano la logica classica del prim'ordine. Le formule di questo linguaggio sono classificate in base all'alternanza dei quantificatori e tutti i sistemi hanno in comune fra loro un insieme di assiomi aritmetici di base, un assioma di induzione $0 \in X \wedge \cup n(n \in X \rightarrow n+1 \in X) \rightarrow \forall n(n \in X)$ e differiscono per le formule φ permesse nello schema di comprensione $\exists X\, \forall n(n \in X \leftrightarrow \varphi(n))$ o per la presenza di assiomi addizionali.

RCA_0, che è la teoria di base per molti degli studi di *reverse mathematics*, ha la comprensione solo per formule Δ_1^0, cioè formule che si possono provare essere equivalenti sia ad una formula Σ_1^0 sia ad una formula Π_1^0 (e per ragioni tecniche, ha anche uno schema di induzione per formule Σ_1^0).

WWKL_0, introdotto da Yu e Simpson [3] si è rivelato adatto per sviluppare la teoria della misura; esso consiste di RCA_0 più l'assioma *WWKL* (Weak Weak König's Lemma): *se T è un sottoalbero di $2^{<\mathbb{N}}$ senza cammini infiniti, allora* $\lim\limits_{n \to \infty} 2^{-n} \cdot |\{\sigma \in T : \text{length}(\sigma) = n\}| = 0$.

WKL_0 estende RCA_0 aggiungendo ad esso il Weak König's lemma: *se T è un sottoalbero di $2^{<\mathbb{N}}$ senza cammini infiniti, allora T è finito.* In WKL_0 si riesce a sviluppare la teoria delle funzioni continue e della compattezza.

ACA_0 ha la comprensione per formule aritmetiche arbitrarie (cioè senza quantificatori insiemistici) e consente di sviluppare la teoria della convergenza sequenziale.

La monografia di Stephen Simpson ([1]) costituisce il testo base di questo programma, mentre una panoramica si può trovare in [2].

Il nome del sottosistema tra parentesi all'inizio di una definizione o di un teorema, indica che quella definizione o quel teorema sono dati o dimostrati in quel sottosistema.

2. – Topologia & Reverse Mathematics.

Prima di descrivere alcuni dei risultati principali ottenuti in questa tesi, diamo, molto schematicamente e informalmente, le definizioni dei concetti studiati.

DEFINIZIONE 2.1 (RCA_0). – *Sia X uno spazio metrico completo separabile. X è detto*:

- compatto, *se è totalmente limitato.*
- Heine-Borel compatto, *se ogni ricoprimento aperto ha un sottoricoprimento finito.*
- Sequenzialmente compatto, *se ogni successione ha una sottosuccessione convergente.*
- Lebesgue, *se ogni ricoprimento aperto ha numero di Lebesgue* (*cioè $q > 0$ tale che $\forall x \in X$ $B(x, q)$ è contenuta in un aperto del ricoprimento*).
- Atsuji, *se ogni funzione continua $f: X \to \mathbb{R}$ è uniformemente continua.*

Sia $K \subseteq X$. Diciamo che K è:

- chiuso, *se è il complementare di un'unione numerabile di palle aperte in X.*
- separabilmente chiuso, *se è l'insieme dei punti di accumulazione di una successione di punti di X.*

È importante notare che le nozioni di spazio compatto, Heine-Borel compatto e sequenzialmente compatto, coincidono in ACA_0 mentre in sottosistemi più deboli danno luogo a concetti diversi. Lo stesso dicasi per le nozioni di chiuso e separabilmente chiuso in spazi compatti.

Tra i risultati più importanti, si segnala il legame fra spazi compatti, Lebesgue e Atsuji: se da un lato si prova l'equivalenza tra WKL_0 e «Compatto implica Lebesgue» e in RCA_0 si prova che ogni spazio Lebesgue è Atsuji, dall'altro lato abbiamo dimostrato in ACA_0 che ogni spazio Atsuji è Lebesgue, ma, al momento, non abbiamo ancora trovato il *reversal* (cf. M. Giusto e A. Marcone, *Lebesgue numbers and Atsuji spaces in subsystems of second order arithmetic* Arch. for Math. Logic, **37** (1998), 343-362). Nel tentativo di dare una risposta a questo problema, analizzando le dimostrazioni in dettaglio, abbiamo introdotto i concetti di spazio A. S. C. e Leb_2:

DEFINIZIONE 2.2. – (RCA_0) *X è detto*:

- A. S. C., *se ogni successione $\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ per cui esiste un'altra successione $\langle y_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ tale che* (1) $\lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n) = 0$ *e* (2) $x_n \neq y_n$ *per ogni n, ha un punto di accumulazione.*
- Leb_2, *se ogni ricoprimento aperto di 2 elementi ha numero di Lebesgue.*

Per mezzo di questi concetti abbiamo messo in evidenza come ACA_0 sia *necessario* per la *particolare dimostrazione data* di «Atsuji implica Lebesgue». Ciò non esclude l'esistenza di un'altra dimostrazione che possa fare a meno di ACA_0; tuttavia, altri risultati connessi fanno sospettare fortemente che ACA_0 sia necessario per dimostrare tale teorema.

Il Teorema di estensione di Tietze classicamente viene enunciato come segue: *Sia* X *uno spazio metrizzabile, sia* $C \subseteq X$ *chiuso e sia* $f : C \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Allora esiste una funzione continua* $F : X \to \mathbb{R}$ *che estende* f.

Lavorando in spazi metrici completi separabili compatti, abbiamo affrontato lo studio di diverse versioni di questo teorema (che differiscono fra loro per le ipotesi su C e su f). Una di esse è quella in cui C è separabilmente chiuso con f uniformemente continua con modulo di uniforme continuità (abbiamo cioè una funzione che lega in maniera effettiva nella definizione di uniforme continuità δ a ε) che risulta essere equivalente a WKL_0 (dimostrazione tutt'altro che banale!). Un'altra versione interessante è quella per C chiuso, (oppure chiuso e separabilmente chiuso), f uniformemente continua con modulo di uniforme continuità: essa è dimostrabile in WKL_0, ma al momento siamo stati capaci di provare un *reversal* solo parziale, mostrando che tale versione implica l'assioma DNR (più forte di RCA_0 ma più debole di WKL_0) che si può descrivere così: per ogni A esiste una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ che nel punto n è diversa dall'n-ma funzione ricorsiva (relativizzata ad A) valutata in $\mathbb{N}$. Tale problema aperto è di estremo interesse.

Affrontando questo studio (che di conseguenza ha portato ad un'analisi approfondita di varie versioni del Lemma di Urysohn, usato in modo determinante nella dimostrazione del teorema di Tietze), è venuto naturale studiare le nozioni di insiemi locati e debolmente locati:

DEFINIZIONE 2.3. – (RCA_0) *Sia* $K \subseteq X$. *Diciamo che* K *è*:

- locato, *se* $d(x, K) = \inf\{d(x, y) : y \in K\}$ *esiste come funzione continua su* X *a valori reali.*
- debolmente locato, *se il predicato* $d(x, K) < r$ *è* Σ^0_1.

In RCA_0 si prova che *gli insiemi non vuoti e locati di* X *formano uno spazio metrico compatto* $\mathcal{K}K(X)$ *(con la metrica di Hausdorff).*

Tra i risultati ottenuti, oltre a «Separabilmente chiuso e debolmente locato implica chiuso e locato» ottenuto in RCA_0, vale la pena citare «chiuso implica debolmente locato» che è equivalente a WKL_0 e risponde ad una domanda posta implicitamente da Simpson nella sua monografia ([1]). Per ulteriori dettagli cf. M. Giusto e S.G. Simpson Preprint dell'Università di Torino n. 14/1998 *Located sets and Reverse Mathematics* prossimamente pubblicato su The Journal of Symbolic Logic.

3. – Analisi & Reverse Mathematics.

Se X è uno spazio metrico compatto indichiamo con $\mathcal{C}(X)$ le funzioni uniformemente continue dotate di modulo di uniforme continuità.

DEFINIZIONE 3.1. – (RCA_0) • *Una* misura μ *è un funzionale lineare limitato e positivo* $\mu : \mathcal{C}(X) \to \mathbb{R}$ *tale che* $\mu(1) = 1$. μ_L *indica la misura di Lebesgue su* $\mathbb{R}$.

- *Se* $U \subseteq X$ *è un aperto la sua misura è definita come*

$$\mu(U) = \sup\{\mu(f) : f \in \mathcal{C}(X),\ 0 \leq f \leq 1,\ f = 0 \ \text{su}\ X \setminus U\}.$$

Abbiamo iniziato uno studio di insiemi e funzioni misurabili nel contesto dei sottosistemi di Z_2 fornendo due approcci alla nozione di insieme misurabile: l'uno più semplice ed elementare e sviluppabile in RCA_0; l'altro più generale ma sviluppabile in WWKL_0. I due approcci coincidono in WWKL_0.

1. (RCA_0). *Sia* $X = [0, 1]$. *Diciamo che* $M \subseteq X$ *è* misurabile *se si può «approssimare» con unioni finite di intervalli.*

2. (WWKL_0). *Sia X spazio metrico compatto completo separabile.* $M \subseteq X$ *è* misurabile *se la sua* funzione caratteristica *è un elemento di* L^1.

Accanto alla nozione di insieme misurabile, si è introdotta quella di *funzione misurabile*, per cui sono misurabili tutte le funzioni f tali che $f_m = \min(\max(f, -m), m)$, $m \in \mathbb{N}$, risulta essere (codificabile come) un elemento di L^1.

In WWKL_0 abbiamo ottenuto il classico risultato (ovvio per l'analisi ma non per noi!) che ogni funzione continua è misurabile. Nel nostro contesto tale risultato è interessante perché, oltre ad aprire la strada allo studio di funzioni misurabili al di fuori del contesto di L^1, la sua dimostrazione ha richiesto una nuova idea che si è rivelata molto utile per provare anche altri risultati in questa tesi.

In WWKL_0 abbiamo fatto uno studio (completo di *reversal*) del lemma di ricoprimento di Vitali, che classicamente viene enunciato come segue: *Sia* $E \subseteq \mathbb{R}$ *ricoperto nel senso di Vitali da* $\mathfrak{J}$ ($\forall \varepsilon > 0\ \forall x \in E\ \exists I \in \mathfrak{J}\ \forall x \in I \wedge diam(I) < \varepsilon$). *Allora esiste una successione* $\langle I_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ *di elementi di* $\mathfrak{J}$ *a due a due disgiunti tali che* $\mu_L\left(E \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n\right) = 0$.

Abbiamo studiato i casi in cui E è un intervallo o un insieme misurabile ottenendo per entrambe le versioni l'equivalenza con WWKL_0. Da notare che la dimostrazione in WWKL_0 di tale risultato è completamente diversa da quella che si trova nei libri di analisi. La dimostrazione del reversal è molto interessante nella sua semplicità per il fatto che si è usata una versione dell'additività numerabile per aperti disgiunti dimostrabile in RCA_0: risultato questo che contrasta con il teorema secondo cui l'additività numerabile in generale è equivalente a WWKL_0 [3]. Per ulteriori dettagli cf. D.K. Brown, M. Giusto e S.G. Simpson Preprint dell'Università di Torino n. 17/1997 *Vitali's Theorem and WWKL* prossimamente pubblicato sugli Archive for Mathematical Logic.

BIBLIOGRAFIA

[1] STEPHEN G. SIMPSON, *Subsystems of Second Order Arithmetic*, Perspectives in Mathematical Logic (1999), 458 pages.

[2] STEPHEN G. SIMPSON, *Subsystems of* Z_2 *and reverse mathematics – in Gaisi Takeuti,* Proof Theory, *Studies in Logic and Foundations of Mathematics, Elsevier, 1987, x + 490 pages*, (1978), pp. 434-448.

[3] XIAOKANG YU and STEPHEN G. SIMPSON, *Measure theory and weak König's lemma*, Archive for Mathematical Logic, **30** (1990), 171-180.

Via Loreto Vecchia 9/10/A, 17100 Savona
e-mail: giusto@dm.unito.it oppure mariagnese@savonaonline.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Torino) - Ciclo IX
Direttore di ricerca: Prof. Stephen Simpson, The Pennsylvania State University, USA