BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

MARIA EMILIA MAIETTI

Teoria dei tipi di universi categoriali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1999), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 41–44.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_1S_41_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 2-A Suppl. (1999), pag. 41-44

Teoria dei tipi di universi categoriali.

Maria Emilia Maietti

Il soggetto di questa tesi riguarda un argomento di logica matematica e più in particolare di logica categoriale. Infatti vengono studiati aspetti logici di universi categoriali, quali i topoi elementari e i pretopoi di Heyting, ottenuti a partire da generalizzazioni del concetto di topos di fasci di Grothendieck. Il risultato principale della tesi consiste nell'introduzione di due teorie dei tipi, quella dei topoi e quella dei pretopoi di Heyting con oggetto dei numeri naturali, per cui si prova un teorema di completezza rispetto ai corrispondenti universi categoriali. Il problema all'origine della ricerca di tali teorie dei tipi è quello di confrontare i suddetti universi categoriali con la teoria dei tipi di Martin-Löf, poichè sono tutti accomunati dalla capacità di fornire modelli per teorie degli insiemi intuizioniste. A tal scopo altri risultati contenuti nella tesi riguardano la possibilità di estendere la teoria dei tipi di Martin-Löf con costrutti presenti in tali universi categoriali, quali i quozienti effettivi e l'insieme delle parti.

A partire dagli anni settanta, P. Martin-Löf ha sviluppato la «Constructive Type Theory» [6] come teoria degli insiemi per formalizzare la matematica avente come logica sottostante quella intuizionista. La logica intuizionista si differenzia da quella classica perchè ammette solo prove costruttive di esistenza esplicita e come conseguenza di ciò essa rifiuta il principio del terzo escluso, cioè l'assunzione che, per ogni proposizione A, valga A o valga la negazione di A. In relazione al concetto di insieme, per dare ragione del nome *teoria dei tipi* dato da Martin-Löf alla sua teoria insiemistica riportiamo una citazione da un suo articolo [5]

«*Every mathematical object is an object given together with its type... A type is defined by prescribing what we have to do in order to construct an object of that type. This is almost verbatim the definition of the notion of set given by Bishop.*»

Una seconda citazione, riguardo al rapporto tra la teoria dei tipi e i sistemi logici tradizionali, aiuta a capire meglio la novità dell'approccio di Martin-Löf alla teoria degli insiemi:

«*The language of the theory of types is richer than the languages of traditional intuitionistic systems in permitting proofs to appear as parts of propositions so that the propositions of the theory can express properties of proofs* (*and not only individuals like in first order predicate logic*)».

In questo approccio si considerano solo dimostrazioni «costruttive», ove costruttivo significa «computabile»; infatti ogni dimostrazione nella teoria dei tipi corrisponde ad un programma in un opportuno linguaggio di programmazione funzionale. È interessante notare che esistono proof-checker che permettono il controllo automatico su calcolatore delle prove sviluppate in teoria dei tipi. Non bisogna dimenticare inoltre che ci sono argomenti significativi di matematica costruttiva, quale ad esempio la topologia formale di G. Sambin, sviluppati completamente in tale ambiente.

In ambito categoriale a partire dagli anni sessanta, F. W. Lawvere si cimentò nel progetto di fornire un fondamento alla matematica tramite l'assiomatizzazione della categoria degli insiemi. La sua idea era di sostituire la relazione di appartenenza tra insiemi con la composizione di funzioni. Con Tierney arrivò alla nozione di *topos elementare* astraendo le proprietà strutturali di un topos di Grothendieck, cioè una categoria di fasci su un sito a valori nella categoria degli insiemi classici. Per il fatto di non dare rilevanza alle assunzioni insiemistiche, l'assiomatizzazione da loro proposta risultò più generale nel senso che mentre un topos di Grothendieck è un topos elementare, il viceversa non vale sempre. Secondo Lawvere, un topos elementare può essere pensato come un universo generalizzato di insiemi, ma la logica sottostante è intuizionista. Questa idea è stata formalizzata negli anni settanta da Mitchell, Benabou, Joyal e altri dando un'esplicita descrizione di un linguaggio formale adatto ad essere interpretato in un topos. Questo linguaggio è tipato, perchè ad ogni termine occorrente in una formula è assegnato un tipo e la logica che ne risulta è multi-sorte se si considerano come sorti i tipi e come formule i termini del tipo corrispondente al sottoggetto classificatore. Di tale logica nota con il nome di *logica di ordine superiore* è data un'esposizione sistematica nel libro di Lambek e Scott [3].

Cercando di fornire modelli della teoria degli insiemi classica in ambito categoriale, Cole e Mitchell scoprirono che i topoi ben puntati con un oggetto dei numeri naturali e l'assioma di scelta costituiscono un modello per la teoria degli insiemi di Zermelo con assioma di scelta e l'assioma di comprensione su formule contenenti solo quantificatori limitati, che è una restrizione della usuale teoria ZFC di Zermelo-Fraenkel con assioma di scelta.

Solo più recentemente Joyal e Moerdijk hanno risolto il problema di fornire un modello per ZFC in ambito categoriale [2]. Essi hanno scoperto che è sufficiente prendere come universo categoriale un *pretopos di Heyting con un oggetto dei numeri naturali* e «ritagliare» al suo interno una classe di «small maps» soddisfacente opportuni assiomi per costruire un modello di ZFC, o anche di ZFI che è la versione intuitionista di ZFC senza l'assioma di scelta. La nozione di pretopos fu introdotta da Grothendieck ed è più debole di quella di topos. Dal punto di vista logico, come dimostrato da Makkay e Reyes, i pretopoi godono di una caratterizzazione in termini di categorie logiche, ossia delle strutture necessarie per interpretare la logica coerente multi-sorte, che è una logica del primo ordine senza implicazione. Invece un pretopos di Heyting è ottenuto aggiungendo ad un pretopos ciò che manca per interpretare la logica predicativa intuizionistica al primo ordine.

Al fine di permettere un più facile confronto a livello logico tra la Constructive Type Theory e tali universi categoriali sono stati formulati due calcoli tipati, rispettivamente uno per i pretopoi di Heyting con oggetto dei numeri naturali, detti per brevità H-pretopoi, e uno per i topoi, seguendo lo stile della teoria dei tipi di Martin-Löf. La differenza principale tra tali calcoli tipati e la logica multi-sorte consiste nel fatto che mentre nella logica multisorte le formule sono distinte sintatticamente dai tipi, nei calcoli tipati introdotti qui le formule corrispondono a particolari tipi dipendenti e precisamente ai tipi con al più una prova, detti *mono*. Tale passaggio è reso possibile tramite la considerazione di costruzioni per tipi dipendenti, mentre nella logica multisorte le sorti corrispondono a tipi solo semplici.

Per provare che tali calcoli tipati corrispondono esattamente ai rispettivi universi categoriali si sono dimostrati i teoremi di completezza e quelli di equivalenza in un senso generalizzato tra la categoria degli H-pretopoi (topoi) e la categoria delle teorie dei tipi ad essi associati, analogamente a quelli presente in letteratura tra topoi e logica di ordine superiore (cf.[3]). I teoremi di completezza possono essere enunciati simultaneamente come segue, ove con HP s'intende la teoria dei tipi per gli H-pretopoi, con $\mathcal{T}_t$ la teoria dei tipi per i topoi e con $\mathfrak{I}_{\mathcal{P}}$ l'interpretazione della teoria nell'universo categoriale:

TEOREMA 1. – *Supponiamo che* $a \in A\ [\Gamma]$ *e* $b \in A\ [\Gamma]$ *siano derivabili in* HP $(\mathcal{T}_t)$. *Allora, se per ogni H-pretopos (topos)* $\mathcal{P}$ *vale* $\mathfrak{I}_{\mathcal{P}}(a \in A\ [\Gamma]) = \mathfrak{I}_{\mathcal{P}}(b \in A\ [\Gamma])$ *segue che* $a = b \in A\ [\Gamma]$ *è derivabile in* HP $(\mathcal{T}_t)$.

Supponiamo che A *type* $[\Gamma]$ *e* B *type* $[\Gamma]$ *siano derivabili in* HP $(\mathcal{T}_t)$. *Allora, se per ogni H-pretopos (topos)* $\mathcal{P}$ *vale* $\mathfrak{I}_{\mathcal{P}}(A\ type\ [\Gamma]) = \mathfrak{I}_{\mathcal{P}}(B\ type\ [\Gamma])$ *segue che* $A = B\ [\Gamma]$ *è derivabile in* HP $(\mathcal{T}_t)$.

L'interpretazione $\mathfrak{I}_{\mathcal{P}}$ associa ad un tipo dipendente in un certo contesto una sequenza di morfismi dell' H-pretopos (topos) dato dalla valutazione di una sequenza di funtori fibrati. Il ricorso ai funtori fibrati permette di interpretare la sostituzione tramite l'operazione di pullback, ovviando alla difficoltà che il pullback è definito a meno di isomorfismi.

La principale differenza tra la teorie dei tipi degli universi categoriali considerati e la teoria dei tipi di Martin-Löf è costituita dal fatto che quella di Martin-Löf è una teoria degli insiemi predicativa, cioè sono ammesse solo costruzioni induttive di insiemi, mentre in un topos vi è il costruttore dell'insieme delle parti, che dal punto di vista logico corrisponde alla possibilità di una quantificazione impredicativa e in un H-pretopos vi è un costruttore di quozienti effettivi. Sorge di conseguenza la questione se sia possibile estendere la teoria dei tipi di Martin-Löf con un insieme delle parti e con quozienti effettivi. Occorre però notare che nella teoria di Martin-Löf è presente un quantificatore esistenziale sulle proposizioni più forte di quello intuizionista: infatti, esso permette di derivare l'assioma della scelta, che non vale in generale in un topos a livello delle proposizioni. Anzi, in un topos, l'assioma della scelta a livello delle proposizioni fa sì che la logica sottostante diventi classica [1]. Perciò la teoria dei tipi di Martin-Löf e quella dei topoi sembrano quindi incompatibili da un punto di vista costruttivo se si pensa di far coincidere le proposizioni con i costruttori insiemistici. Difatti si dimostra che non è possibile estendere la teoria dei tipi di Martin-Löf con l'insieme delle parti, se si pensano i sottoinsiemi come funzioni proposizionali e si richiede che valga a livello di uguaglianza definizionale l'assioma di estensionalità, ossia che due sottoinsiemi siano uguali se hanno gli stessi elementi, poichè la validità dell'assioma della scelta a livello di proposizioni comporta la logica classica, in modo analogo a quanto accade nei topoi.

È da notare comunque che l'estensione considerata è costruita rispettando l'isomorfismo «propositions as types» tipico della teoria dei tipi. Invece nella teoria dei tipi dipendenti di topoi e H-pretopoi vale l'isomorfismo «propositions as mono types». Se ne deduce che è possibile estendere la teoria dei tipi di Martin-Löf con un insieme delle parti come quello di un topos senza cadere nella logica classica a patto però che i sottoinsiemi corrispondano soltanto alle funzioni proposizionali mono.

Come nel caso dell'insieme delle parti, estendendo la teoria dei tipi di Martin-Löf con quozienti effettivi, in presenza di almeno due universi e del principio di identità delle prove dell'uguaglianza proposizionale nel caso si consideri la teoria dei tipi intensionale, si dimostra il principio del terzo escluso per gli insiemi piccoli. Una proposta di quozienti effettivi compatibili costruttivamente con gli insiemi delle parti di un topos è presente nella teoria dei tipi degli H-pretopoi: basta restringersi alle sole relazioni di equivalenza mono.

In conclusione lo studio della teoria dei tipi degli H-pretopoi e dei topoi ha permesso di evidenziare la presenza di particolari costruttori dell'insieme delle parti e di quozienti effettivi che al contrario delle loro versioni non ristrette preservano la costruttività della teoria.

Infine, vale la pena di notare che le teorie dei tipi proposte nella tesi, essendo linguaggi interni dei corrispettivi universi categoriali (cf. [4]), possono essere usate per dimostrare in modo logico proprietà categoriali.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. Diaconescu, *Axiom of choice and complementation.*, Proc. Amer. Math. Soc., **51** (1975), 176-178.

[2] A. Joyal and I. Moerdijk, *Algebraic set theory*, Cambridge University Press - Lecture Note Series, **220** (1995).

[3] J. Lambek and P.J. Scott, *An introduction to higher order categorical logic*, Cambridge University Press - Studies in Advanced Mathematics, **7** (1986).

[4] M.E. Maietti, *The internal type theory of an Heyting Pretopos*, Proceedings of Types '96 - LNCS, editors E. Gimenez, C. Paulin-Mohring (1997).

[5] P. Martin-Löf, *An intuitionistic theory of types: predicative part.*, Logic Colloquium 1973 - H.E. Rose and J.C. Shepherdson, Amsterdam (1975), 73–118.

[6] B. Nordström, K. Peterson and J. Smith, *Programming in Martin Löf's Type Theory.*, Clarendon Press, Oxford (1990).

Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata - Università di Padova
e-mail: maietti@math.unipd.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Padova) - Ciclo IX
Direttore della ricerca: Prof. Giovanni Sambin
Correlatore della tesi: Prof. Silvio Valentini