Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Gustavo Mezzetti

Contesti di Morita topologici ed equivalenze tra categorie di moduli linearmente topologizzati e completi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1999), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 45–48.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_1S_45_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 2-A Suppl. (1999), pag. 45-48

Contesti di Morita topologici ed equivalenze tra categorie di moduli linearmente topologizzati e completi.

GUSTAVO MEZZETTI

I teoremi di Morita sulle equivalenze fra categorie di moduli (vedi [3, Sezione 3.12 e segg.]) sono fra i risultati piú citati in algebra non commutativa. Essi stabiliscono condizioni necessarie e sufficienti affinché due anelli R ed S siano **simili**, abbiano cioè categorie di moduli (sia destri, sia sinistri) equivalenti, una relazione fra R ed S piú debole dell'isomorfismo. Inoltre, essi descrivono tutte e sole le possibili equivalenze fra le categorie **Mod**-R (risp., R-**Mod**) e **Mod**-S (risp., S-**Mod**), rappresentandole sia per mezzo di prodotti tensoriali, sia per mezzo di funtori Hom. Infine, come corollario, essi identificano i bimoduli «invertibili» (a meno di isomorfismi) dell'operazione «prodotto tensoriale».

In estrema sintesi, questa tesi presenta una generalizzazione della classica teoria dei contesti di Morita dal caso dei moduli astratti sopra anelli astratti al caso dei moduli linearmente topologizzati e completi sopra anelli linearmente topologizzati e completi, ottenendo risultati formalmente analoghi a quelli classici appena ricordati. Va però perduta la simmetria fra destra e sinistra: tale rottura della simmetria è dovuta alla presenza delle topologie lineari, che nel caso di anelli non commutativi si presentano in modo naturale come topologie lineari da un solo lato (lineari a destra, oppure a sinistra), ed è stata probabilmente il principale ostacolo che ha impedito finora la scoperta dei contesti di Morita topologici. La teoria di tali contesti si applica poi allo studio di una interessante classe di equivalenze fra categorie di moduli l.t. (a partire da ora abbreviamo «linearmente topologizzato *e di Hausdorff*» con «l.t.») e completi, precisando ed estendendo i risultati di [2].

Per poter essere piú precisi, fissiamo alcune notazioni. Sia (R, ϱ) un anello l.t. a destra e completo, e sia **CLT**-(R, ϱ) la categoria degli (R, ϱ)-moduli topologici destri l.t. e completi. Innanzitutto, introduciamo una conveniente categoria di bimoduli.

DEFINIZIONE 1. – *Siano (R, ϱ) ed (S, σ) due anelli l.t. a destra e completi; indichiamo con (R, ϱ)-${}^u\mathcal{B}$-(S, σ) la categoria seguente. Gli oggetti di (R, ϱ)-${}^u\mathcal{B}$-(S, σ) sono (R, S)-bimoduli ${}_RA_S$ dotati di una topologia α tale che*:

- $(A_S, \alpha) \in$ **CLT**-(S, σ);
- *l'azione sinistra di R su A dà luogo a un omomorfismo* continuo *d'anelli $\omega : (R, \varrho) \to CEnd_S^u(A, \alpha)$; dove $\mathrm{CEnd}_S^u(A, \alpha)$ indica l'anello degli endomorfismi continui di (A, α), dotato della topologia della convergenza uniforme.*

Un morfismo f in (R, ϱ)-${}^u\mathcal{B}$-(S, σ) da (A, α) in (B, β) è un omomorfismo continuo *di (R, S)-bimoduli $f : (A, \alpha) \to (B, \beta)$.*

Siano (R, ϱ), (S, σ) e (T, τ) tre anelli l.t. a destra e completi. Indichiamo con $\mathrm{CHom}_T^u((B, \beta), (C, \gamma))$, dove $(B, \beta) \in (S, \sigma)$-${}^u\mathcal{B}$-$(T, \tau)$ e $(C, \gamma) \in (R, \varrho)$-${}^u\mathcal{B}$-$(T, \tau)$, l'$(R, S)$-bimodulo delle applicazioni T-lineari e continue da (B, β) in (C, γ), dotato della topologia della convergenza uniforme; si dimostra che $\mathrm{CHom}_T^u((B, \beta),(C, \gamma)) \in (R, \varrho)\text{-}^u\mathcal{B}\text{-}(S, \sigma)$. Per ogni fissato $(B, \beta) \in (S, \sigma)\text{-}^u\mathcal{B}\text{-}(T, \tau)$ si ha dunque il funtore

$$\mathrm{CHom}_T^u((B, \beta), -) : (R, \varrho)\text{-}^u\mathcal{B}\text{-}(T, \tau) \to (R, \varrho)\text{-}^u\mathcal{B}\text{-}(S, \sigma), \tag{1}$$

che agisce sui morfismi nel modo usuale. Nel nostro lavoro abbiamo dimostrato che tale funtore ha un aggiunto sinistro. In effetti, dati $(A, \alpha) \in (R, \varrho)\text{-}^u\mathcal{B}\text{-}(S, \sigma)$ e $(B, \beta) \in (S, \sigma)\text{-}^u\mathcal{B}\text{-}(T, \tau)$, si munisce il prodotto tensoriale $A \otimes_S B$ di una topologia opportuna; indicato con $(A, \alpha) \otimes_S^u (B, \beta)$ il modulo topologico così ottenuto, se ne prende il completamento di Hausdorff $(A, \alpha)\ \widehat{\otimes}_S^u (B, \beta)$, e si dimostra che esso appartiene a $(R, \varrho)\text{-}^u\mathcal{B}\text{-}(T, \tau)$. In tal modo si ottiene un funtore

$$-\ \widehat{\otimes}_S^u (B, \beta) : (R, \varrho)\text{-}^u\mathcal{B}\text{-}(S, \sigma) \to (R, \varrho)\text{-}^u\mathcal{B}\text{-}(T, \tau), \tag{2}$$

che agisce sui morfismi nel modo usuale (cioè tramite il prodotto tensoriale di applicazioni). Si dimostra che 2 è aggiunto sinistro di 1.

Il prodotto tensoriale topologico summenzionato è associativo, verifica

$$(S, \sigma)\ \widehat{\otimes}_S^u (B, \beta) \cong (B, \beta) \quad \text{e} \quad (A, \alpha)\ \widehat{\otimes}_S^u (S, \sigma) \cong (A, \alpha)$$

per ogni $(A, \alpha) \in (R, \varrho)\text{-}^u\mathcal{B}\text{-}(S, \sigma)$ e ogni $(B, \beta) \in (S, \sigma)\text{-}^u\mathcal{B}\text{-}(T, \tau)$, e commuta con le somme dirette, munite di una topologia opportuna (tutte queste proprietà, ovviamente, valgono a meno di isomorfismi topologici).

Per la definizione seguente, cfr. [3, Sezione 3.12, Definizione 3.11].

DEFINIZIONE 2. – *Un* ***contesto di Morita topologico*** *è una collezione di sei oggetti* $((R, \varrho),(S, \sigma),(A, \alpha),(B, \beta), \mu, \nu)$ *cosiffatti*:

- (R, ϱ) *e* (S, σ) *sono due anelli l.t. a destra e completi*;
- $(A, \alpha) \in (S, \sigma)\text{-}^u\mathcal{B}\text{-}(R, \varrho)$ e $(B, \beta) \in (R, \varrho)\text{-}^u\mathcal{B}\text{-}(S, \sigma)$;
- $\mu : (B, \beta) \otimes_S^u (A, \alpha) \to (R, \varrho)$ e $\nu : (A, \alpha) \otimes_R^u (B, \beta) \to (S, \sigma)$ *sono due applicazioni bilineari e continue, soddisfacenti le due condizioni seguenti*:

1. $\forall a \in A,\ \forall b \in B,\ \forall a' \in A\ \ \nu(a \otimes b)\cdot a' = a \cdot \mu(b \otimes a')$;
2. $\forall b \in B,\ \forall a \in A,\ \forall b' \in B\ \ \mu(b \otimes a)\cdot b' = b \cdot \nu(a \otimes b')$.

Con l'usuale convenzione di scrivere (b, a) in luogo di $\mu(b\ a)$ e $[a, b]$ in luogo di $\nu(a \otimes b)$, le condizioni 0.3 e 0.4 della Definizione 0.2 assumono il consueto aspetto

$$[a, b]\, a' = a(b, a') \quad \text{e} \quad (b, a)\, b' = b[a, b'].$$

È importante osservare che ogni $(A, \alpha) \in \mathbf{CLT}\text{-}(R, \varrho)$ definisce un contesto di Morita topologico $((R, \varrho),(S, \sigma),(A, \alpha),(B, \beta), \mu, \nu)$ in cui $(S, \sigma) = \mathrm{CEnd}_R^u(A, \alpha)$, $(B, \beta) = \mathrm{CHom}_R^u((A, \alpha),(R, \varrho))$, e le mappe μ e ν sono definite come nel caso classico. Esso si dirà il **contesto di Morita topologico generato da** (A, α).

Sia $((R, \varrho),(S, \sigma),(A, \alpha),(B, \beta), \mu, \nu)$ un contesto di Morita topologico, e siano $\widehat{\mu} : (B, \beta)\ \widehat{\otimes}_S^u (A, \alpha) \to (R, \varrho)$ e $\widehat{\nu} : (A, \alpha)\ \widehat{\otimes}_R^u (B, \beta) \to (S, \sigma)$ i morfismi continui canonicamente associati a μ e ν, rispettivamente. Si dimostra che se μ (risp., ν) ha immagine densa in (R, ϱ) (risp., in (S, σ), allora $\widehat{\mu}$ (risp., $\widehat{\nu}$) è un isomorfismo topologico. Ciò motiva la seguente

DEFINIZIONE 3. – *Un contesto di Morita topologico* $((R, \varrho), (S, \sigma), (A, \alpha), (B, \beta), \mu, \nu)$ *si dice* ***denso*** *se* μ *e* ν *hanno entrambe immagine densa.*

Da quanto detto, si ricava facilmente il seguente

TEOREMA 1. – *Sia* $((R, \varrho), (S, \sigma), (A, \alpha), (B, \beta), \mu, \nu)$ *un contesto di Morita topologico denso; valgono i fatti seguenti:*

1. *la coppia di funtori*

$$-\hat{\otimes}^u_R(B, \beta) : \mathbf{CLT}\text{-}(R, \varrho) \to \mathbf{CLT}\text{-}(S, \sigma)$$

e

$$-\hat{\otimes}^u_S(A, \alpha) : \mathbf{CLT}\text{-}(S, \sigma) \to \mathbf{CLT}\text{-}(R, \varrho)$$

è un'equivalenza di categorie;

2. *vi è un isomorfismo reticolare fra il reticolo degli ideali destri chiusi di* (R, ϱ) *e il reticolo degli* S*-sottomoduli chiusi di* (B, β), *che subordina un isomorfismo tra il reticolo degli ideali bilateri chiusi di* (R, ϱ) *e il reticolo dei sotto-*(R, S)*-bimoduli chiusi di* (B, β);

3. *vi è un isomorfismo reticolare fra il reticolo degli ideali sinistri chiusi di* (R, ϱ) *e il reticolo degli* S*-sottomoduli chiusi di* (A, α), *che subordina un isomorfismo tra il reticolo degli ideali bilateri chiusi di* (R, ϱ) *e il reticolo dei sotto-*(S, R)*-bimoduli chiusi di* (A, α);

4. *fatti analoghi a 2 e 3 valgono per* (S, σ), *ma scambiando i ruoli di* (A, α) *e di* (B, β); *di conseguenza, i reticoli degli ideali bilateri chiusi di* (R, ϱ) *e di* (S, σ) *sono isomorfi.*

Da questo teorema si riottiene immediatamente il risultato principale di [4], che era a sua volta un'ampia generalizzazione del risultato principale di [5]. Ovviamente, l'equivalenza del punto 0.6 può anche rappresentarsi per mezzo di funtori $\mathrm{CHom}^u_{\cdot}$.

Continuando il parallelo con la teoria classica, diamo la seguente

DEFINIZIONE 4. – $(P, \varepsilon) \in \mathbf{CLT}\text{-}(R, \varrho)$ *si dice un* ***progeneratore topologico*** *e esso è topologicamente finitamente generato (cioè, per ogni suo sottomodulo aperto* P', *il quoziente* P/P' *è f. g. in* $\mathbf{Mod}\text{-}R$), *è un generatore di* $\mathbf{CLT}\text{-}(R, \varrho)$ *nel senso della teoria delle categorie, e il funtore*

$$\mathrm{CHom}^u_R((P, \varepsilon), -) : \mathbf{CLT}\text{-}(R, \varrho) \to \mathbf{CLT}\text{-}\mathbb{Z}$$

(dove $\mathbb{Z}$, *l'anello degli interi, ha la topologia discreta) preserva gli epimorfismi.*

Si dimostra che il contesto di Morita topologico generato da un progeneratore topologico è denso, sicché per esso vale il Teorema 1. Pertanto, un progeneratore topologico $(P, \varepsilon) \in \mathbf{CLT}\text{-}(R, \varrho)$ determina un'equivalenza di categorie (anche di piú, vedi Teorema 2) fra $\mathbf{CLT}\text{-}(R, \varrho)$ e $\mathbf{CLT}\text{-}(S, \sigma)$, dove $(S, \sigma) = \mathrm{CEnd}^u_R(P, \varepsilon)$.

È vero che ogni equivalenza fra $\mathbf{CLT}\text{-}(R, \varrho)$ e $\mathbf{CLT}\text{-}(S, \sigma)$, dove (R, ϱ) e (S, σ) sono due anelli l.t. a destra e completi, è determinata in questo modo da un progeneratore topologico? Purtroppo, non siamo riusciti a rispondere a questa domanda in tutta la sua generalità; abbiamo però potuto appurare che la risposta è «sì» per una interessante classe di equivalenze, che abbiamo chiamato *equivalenze topologiche*. Tali equivalenze possono essere descritte mediante diverse condizioni equivalenti, una delle quali è la seguente: un'equivalenza fra **CLT**-(R, ϱ) e **CLT**-(S, σ) è topologica se manda moduli discreti in moduli discreti (è sufficiente che ciò sia vero in un verso, e allora sarà vero anche nell'altro). Sapere se ciò accade sempre, se, cioè, quali che siano gli anelli l.t. a destra e completi (R, ϱ) ed (S, σ), ogni equivalenza fra **CLT**-(R, ϱ) e **CLT**-(S, σ) sia topologica, è un interessante problema aperto.

TEOREMA 2. – *Sia (R, ϱ) un anello l.t. a destra e completo.*

1. *Se $(P, \varepsilon) \in$ **CLT**-(R, ϱ) è un progeneratore topologico e $(S, \sigma) = \mathrm{CEnd}_R^u(P, \varepsilon)$, l'equivalenza fra **CLT**-(R, ϱ) e **CLT**-(S, σ) determinata da (P, ε) è topologica.*

2. *Viceversa, data un'equivalenza topologica $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ fra **CLT**-(R, ϱ) e **CLT**-(S, σ), dove (S, σ) è un anello l.t. a destra e completo, e posto $(P, \varepsilon) = \mathcal{G}(S, \sigma)$ e $(Q, \zeta) = \mathcal{F}(R, \varrho)$, (P, ε) e (Q, ζ) sono progeneratori topologici di **CLT**-(R, ϱ) e **CLT**-(S, σ) rispettivamente, $(S, \sigma) \cong \mathrm{CEnd}_R^u(P, \varepsilon)$ e $(R, \varrho) \cong \mathrm{CEnd}_S^u(Q, \zeta)$ topologicamente, e $\mathcal{F} \cong -\widehat{\otimes}_R^u(Q, \zeta)$ e $\mathcal{G} \cong -\widehat{\otimes}_R^u(P, \varepsilon)$ topologicamente.*

Esempi di contesti di Morita topologici erano già noti in letteratura in diversi casi particolari. Il piú semplice di tutti è forse quello degli anelli di matrici infinite studiato in [5], e la sua generalizzazione al caso degli anelli topologici di matrici infinite, data dall'autore nella sua tesi di laurea. Un altro caso importante è quello degli ideali generati da idempotenti densi, studiato dall'autore nel già citato lavoro [4]. Sfruttando alcuni risultati di [2], si dimostra che anche le equivalenze studiate da Fuller nel suo già classico lavoro [1] sono un esempio di contesto di Morita topologico.

BIBLIOGRAFIA

[1] K. R. FULLER, *Density and equivalence*, J. Algebra, **29** (1974), 528-550.

[2] E. GREGORIO, *Generalized Morita equivalence for linearly topologized rings*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **79** (1988), 221-246.

[3] N. JACOBSON, *Basic Algebra II*, seconda ed., Freeman, New York, 1989.

[4] G. MEZZETTI, *Topological Morita equivalences induced by ideals generated by dense idempotents*, J. Algebra, **201** (1998), 167-188.

[5] Y. XU, K.-P. SHUM and R. F. TURNER-SMITH, *Morita-like equivalence of infinite matrix subrings*, J. Algebra, **159** (1993), 425-435.

Dipartimento di Matematica Pura e Applicata, Università degli Studi di Padova
e-mail: mezzetti@math.unipd.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Padova) - Ciclo VIII
Direttore di ricerca: Prof. A. Orsatti, Università di Padova