Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Marta Rampichini

Link fibrati scambiabili

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1999), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 53–56.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_1S_53_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 2-A Suppl. (1999), pag. 53-56

Link fibrati scambiabili.

MARTA RAMPICHINI

La tesi si svolge nell'area della topologia a bassa dimensione, e più in particolare riguarda coppie di link fibrati e la loro presentazione come trecce chiuse.

Un link orientato è l'unione disgiunta di un numero finito di curve chiuse semplici orientate in S^3. Un link si dice fibrato se il suo complementare è lo spazio totale di una fibrazione localmente banale, con spazio base la circonferenza S^1. In particolare, il nodo banale è un link fibrato, le cui fibre sono dischi; in effetti, un link è il nodo banale se e solo se il suo complementare è fibrato da dischi.

Considerata una copia del nodo banale A e la sua fibrazione a dischi, un link B si dice presentato come una n-treccia chiusa $\widehat{\beta}$ relativa ad A (il suo asse) se B interseca ogni disco della fibrazione trasversalmente e positivamente in n punti, dove $n = lk(A, B)$.

Tagliando una n-treccia chiusa lungo una fibra, si ottiene una n-treccia β. Vista in $\mathcal{R}^3$, relativamente all'asse z con fibrazione data dai semipiani da esso uscenti, una n-treccia è, a meno di isotopia nello spazio, l'unione disgiunta di n archi semplici con estremi fissati, gli n estremi di partenza su un semipiano, gli n estremi di arrivo su un altro, tali che ogni arco interseca ogni semipiano, tra quello di partenza e quello di arrivo, in un punto.

Le n-trecce formano un gruppo (teorema di Artin), inoltre ogni link si può presentare (in infiniti modi) come treccia chiusa (teorema di Alexander): ciò permette di studiare i link anche da un punto di vista algebrico. In particolare, fissato un asse A per il link B, la presentazione di B come treccia chiusa relativa ad A è unica a meno di coniugio nel gruppo B_n delle n-trecce (teorema di Morton).

L'idea originaria per la tesi sorge dal principio che molte caratteristiche di una treccia β sono meglio evidenziate se si guarda alla coppia della treccia chiusa unita al suo asse, $A \cup \widehat{\beta}$, come ad un link $A \cup B$ con una componente A che è non annodata. Se anche B è non annodato, ci si può chiedere se esso è a sua volta una n-treccia chiusa relativamente ad A, e se sì, che relazione c'è tra le due trecce.

Per ogni intero n, con $n > 1$, ci sono infiniti modi diversi di presentare il nodo banale come n-treccia chiusa (cioè infinite scelte diverse per il relativo asse); il teorema di Markov stabilisce esattamente come tali presentazioni sono in relazione tra loro. Sia $\widehat{\beta} \cup A$ una di tali presentazioni. Allora si dice che β è scambiabile (cf. Morton [3]) se e solo se anche il suo asse A è una treccia chiusa rispetto alla fibrazione a dischi di $\widehat{\beta}$.

Non è affatto banale verificare se una data treccia è o no scambiabile. Il problema, introdotto da Morton in [3], è stato studiato anche da Salkeld.

Nella tesi si considera la seguente generalizzazione della nozione di scmbiabilità: un link fibrato B è una n-treccia generalizzata se esiste un link fibrato A tale che B interseca ogni fibra di A trasversalmente e positivamente in n punti, $n = lk(A, B)$.

DEFINIZIONE 1. – *Si dice che i due link (A, B) sono scambiabili se ognuno dei due è una n-treccia (ev. generalizzata) rispetto all'altro.*

Per ragioni di spazio, mi limito ad esporre succintamente la seconda parte della mia tesi.

In [4], Rudolph definisce un'altra proprietà di una coppia di link, apparentemente più forte della scambiabilità: due link scambiabili si dicono mutuamente intrecciati se le loro fibre si possono posizionare nello spazio in modo tale che l'intersezione di ogni fibra di A con ogni fibra di B sia trasversa, tranne al più in un numero finito di punti singolari, che siano tutti selle non degeneri.

Tale struttura aggiuntiva nella definizione di mutua intrecciabilità mi ha permesso di costruire una nuova tecnica per la descrizione e lo studio delle coppie di link fibrati: si tratta di un insieme finito di dati combinatorici che è sufficiente a descrivere l'immersione delle due fibrazioni nello spazio.

Lo sviluppo di tale tecnica è correlato a idee di Rudolph e principalmente di Birman e Menasco [2]. La differenza sostanziale con il caso esaminato in questa tesi, sta nel fatto che essi studiano l'immersione in una fibrazione di una singola superficie, mentre qui si studia l'immersione di un'intera famiglia di fibre.

Ho chiamato *film* il corrispondente insieme di dati combinatorici: come in un film, la «visione continua» della coppia di fibrazioni nello spazio è data da un insieme finito di *fotogrammi*: ognuno di essi fornisce i dati essenziali (che sono appunto in numero finito) che descrivono la foliazione singolare indotta dalla fibrazione dell'asse su ogni singola fibra della treccia chiusa.

La definizione di film per due link mutuamente intrecciati ha comportato l'analisi e la descrizione delle possibili singolarità su ogni singola fibra, nonché del modo in cui esse cambiano da fibra a fibra: si dimostra che vi sono solo un numero finito di singolarità ammissibili e che esse cambiano quasi sempre in modo isotopico, tranne al più in un numero finito di cambiamenti detti *interazioni*.

Una volta data la definizione di film associato a due link mutuamente scambiabili, ho dimostrato il seguente:

TEOREMA 1. – *Due link $A \cup B$ sono mutuamente intrecciati se e solo se esiste un film ad essi associato.*

La dimostrazione in un verso è contenuta nella definizione di film. Nell'altro verso è fatta per ricostruzione delle foliazioni singolari sui singoli fotogrammi, costruzione di due fibrazioni in ogni cilindro compreso tra due fibre successive, e successivo incollamento di tali cilindri. Si dimostra inoltre che tutte le scelte fatte sono uniche a meno di isotopia.

Rispetto ai metodi e alle condizioni presi in considerazione nella prima parte della tesi, più utili a verificare che una data treccia non è scambiabile, questa nuova tecnica può essere usata per costruire vari esempi di trecce scambiabili. Inoltre sembra più appropriata alla generalizzazione di molte delle proprietà studiate in [3], almeno per quanto riguarda il caso in cui uno dei due link sia il nodo banale.

Sempre nel caso in cui uno dei due link sia il nodo banale, grazie alla presentazione a bande del gruppo delle trecce, data di recente da Birman, Ko e Lee in [1], ho potuto fornire una nuova condizione algebrica per la scambiabilità delle trecce: in tal caso, il film può essere tradotto in modo naturale in una successione finita di parole nei generatori a bande, ognuna differente dalla precedente per una particolare relazione o coniugio, che ho chiamato ammissibili, e di cui ho dato la lista completa.

Al film si può anche associare, in modo biunivoco, un *grafico etichettato*, rappresentante le singolarità delle fibre e le corrispondenti interazioni: nella traduzione algebrica, ad ogni singolarità corrisponde un generatore, e ad ogni interazione corrisponde una relazione nella presentazione a bande del gruppo delle trecce. Dimostro quindi:

TEOREMA 2. – *Se A è il nodo banale, $A \cup B$ sono mutuamente intrecciati se e solo se esiste un grafico etichettato ad essi associato.*

Utilizzando la tecnica del grafico etichettato e l'analisi delle possibili singolarità e interazioni per due link scambiabili, ho dimostrato quindi il seguente:

TEOREMA 3. – *Due link $A \cup B$, con A uguale al nodo banale, sono mutuamente intrecciati se e solo se sono scambiabili.*

Siano $A \cup B$ due link scambiabili, entrambi uguali al nodo banale; allora esistono trecce $\alpha, \beta \in B_n$ con $A \cup B = A \cup \widehat{\beta} = \widehat{\alpha} \cup B$. In tal caso, spiego come ricavare la treccia scambiata α data la treccia β, sempre grazie alla traduzione algebrica della situazione geometrica.

Nel caso più generale di una coppia di link mutuamente intrecciati, entrambi diversi dal nodo banale, il film per link mutuamente intrecciati è tecnicamente più complicato, ma concettualmente analogo. In particolare, dimostro che anche in questo caso l'esistenza di un film è condizione necessaria e sufficiente per il mutuo intrecciamento. Nel caso di due link mutuamente intrecciati $A \cup B$ in cui A sia il nodo banale, dato il film su dischi fibre di A, mostro come ottenere il film per la treccia scambiata B sulle sue fibre (in generale non dischi, se B non è banale).

BIBLIOGRAFIA

[1] BIRMAN J., KO K. H. and LEE S. J., *A new approach to the word problem in the braid groups*, to appear in Advances in Mathematics (1997).
[2] BIRMAN J. and MENASCO W., *Studying Links via Closed Braids I: A Finitness Theorem*, Pacific Journal of Mathematics, **154** (1992), 17-36.
[3] MORTON H. R., *Exchangeable Braids*, Lecture Notes in Science, **95** (1982), 86-105.
[4] RUDOLPH L., *Mutually braided open books and new invariants of fibered links*, Contemporary Mathematics, **78** (1988), 657-673.
[5] STALLINGS J. R., *Constructions of fibred knots and links*, Proc. Symp. in Pure Math. of the A.M.S., **32** (1978), 55-60.

Dipartimento di matematica, Università degli Studi, Milano
e-mail: rampichini@vmimat.mat.unimi.it
Dottorato in matematica (sede amministrativa: Milano) - Ciclo IX
Direttori di ricerca: Prof. Maria Dedò (Dip. Mat., Univ. Stat. Milano)
Hugh Morton (Dept. Pure Math., Univ. Liverpool)