Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Paola Zucca

$(2, 2 \times 2)$-generazione costruttiva di gruppi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1999), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 57–59.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_1S_57_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 2-A Suppl. (1999), pag. 57-59

$(2, 2 \times 2)$-generazione costruttiva di gruppi.

PAOLA ZUCCA

Per il celebre Teorema di Feit-Tompson, ogni gruppo semplice finito non abeliano G ha ordine pari, ed è quindi generato da involuzioni. Detto $i(G)$ il minimo numero di involuzioni che generano G, si ha ovviamente $i(G) \geqslant 3$, poichè due involuzioni generano un gruppo diedrale. D'altra parte, modulo il teorema di classificazione, è stato dimostrato che risulta sempre $i(G) = 3$, con l'unica eccezione di $G = PSU_3(9)$ per cui si ha $i(G) = 4$ ([2]).

V. D. Mazurov, nella 12^a edizione del volume *Unsolved Problems in Group Theory* (1980) ([3]), ha posto il problema più raffinato della determinazione dei gruppi semplici finiti generati da tre involuzioni, due delle quali commutano. Brevemente diremo che un gruppo con questa proprietà è $(2, 2 \times 2)$-generato.

Ya. N. Nuzhin ha determinato i gruppi semplici che risultano $(2, 2 \times 2)$-generati, limitatamente alla classe dei gruppi alterni A_n e dei gruppi speciali proiettivi $PSL_n(F_q)$ e $PSU_n(F_q)$, dove F_q è un campo finito ([4]).

L'argomento principale della nostra tesi riguarda il problema di Mazurov, affrontato nel contesto più generale dei gruppi di matrici, di rango sufficientemente elevato, su un anello finitamente generato R. In particolare, per $R = F_q$, otteniamo la $(2, 2 \times 2)$-generazione dei gruppi semplici classici. Veniamo ora ad una descrizione più dettagliata dei nostri risultati, che sono di tipo costruttivo.

Sia R un anello commutativo con 1. Per ogni $n \geqslant 2$ poniamo

$$E_n(R) := \langle I + xe_{ij} \,|\, x \in R,\ i \neq j \rangle .$$

Qui, al solito, e_{ij} indica la matrice $n \times n$ con 1 nella posizione (i, j) e 0 altrove. Chiaramente $E_n(R)$ risulta un sottogruppo del gruppo $SL_n(R)$ delle matrici di determinante 1.

TEOREMA 1. – *Sia R un anello commutativo generato da $t_1, \ldots, t_d$, dove t_1 è un elemento unitario di periodo moltiplicativo finito. Allora $E_n(R)$ è $(2, 2 \times 2)$-generato per ogni $n \geqslant 8 + 6d$.*

Tale risultato viene successivamente utilizzato nell'ambito degli analoghi dei gruppi classici su R. Tali gruppi, la cui interpretazione geometrica come gruppi di isometrie di forme sesquilineari è ben nota in letteratura ([1]), vengono convenientemente definiti in maniera uniforme, tramite un insieme di generatori.

Sia J un automorfismo dell'anello R tale che $J^2 = id$. Per ogni matrice (r_{ij}) su R, indichiamo con $(r_{ij})^J$ la matrice con r_{ij}^J nella posizione (j, i) e consideriamo l'immersione $h : \mathrm{GL}_n(R) \to \mathrm{GL}_{2n}(R)$ data da $g \mapsto \mathrm{diag}(g, (g^{-1})^J)$. Posto $\varepsilon = \pm 1$, definiamo $E_{2n}(R, J, \varepsilon)$ come il sottogruppo di $\mathrm{GL}_{2n}(R)$ generato da $h(\mathrm{E}_n(R))$, dalle matrici

$$\begin{pmatrix} I & re_{ij} - \varepsilon r^J e_{ji} \\ 0 & I \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} I & (r - \varepsilon r^J)\, e_{ii} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

e dalle loro trasposte, per ogni $i \neq j$ e per ogni $r \in R$.

TEOREMA 2. – *Sia R come nel Teorema 1. Per ogni $n \geqslant 14 + 6d$, il gruppo $E_{2n}(R, J, \varepsilon)$ è $(2, 2 \times 2)$-generato purchè, nel caso $\varepsilon = -1$, 2 sia un elemento unitario di R.*

Infine siano $\nu_1, \ldots, \nu_s$ elementi di $R - \{0\}$ fissati da J e sia $\{v_i \mid 1 \leqslant 2n + s\}$ la base canonica di R^{2n+s}. Per $r \in R$, $i \leqslant s$, siano $\varphi_i(r)$, $\psi_i(r)$ le applicazioni che agiscono sull'R-sottomodulo $\langle v_i, v_{n+i}, v_{2n+i} \rangle$ rispettivamente con matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & -\nu_i r r^J & -r \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2\nu_i r^J & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\nu_i r r^J & 1 & -r \\ 2\nu_i r^J & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e che fissano gli altri elementi della base. Detta $\bar{h}\colon \mathrm{GL}_{2n}(R) \to \mathrm{GL}_{2n+s}(R)$ l'immersione $G \mapsto \mathrm{diag}(G, I_s)$, definiamo $E_{2n+s}(R, J, \nu_1, \ldots, \nu_s)$ come il sottogruppo di $\mathrm{GL}_{2n+s}(R)$ generato da $\bar{h}(\mathrm{E}_{2n}(R, J, 1))$ e dalle matrici $\varphi_i(r)$ e $\psi_i(r)$, per ogni $i \leqslant s$ e per ogni $r \in R$.

TEOREMA 3. – *Sia R come nel Teorema 1 e sia 2 un elemento unitario di R.*

i) $\mathrm{E}_{2n+1}(R, J, \nu)$ *è $(2, 2 \times 2)$-generato, per ogni $n \geqslant 14 + 6d$;*

ii) $\mathrm{E}_{2n+2}(R, J, \nu_1, \nu_2)$ *è $(2, 2 \times 2)$-generato, per ogni $n \geqslant 18 + 6d$.*

Dai precedenti teoremi si deduce, in particolare, la $(2, 2 \times 2)$-generazione dei seguenti gruppi finiti: i gruppi speciali lineari $\mathrm{SL}_n(q)$, $n \geqslant 14$ (per ogni q); i gruppi simplettici $\mathrm{Sp}_{2n}(q)$, $n \geqslant 20$ (q dispari); i gruppi ortogonali $\Omega^+_{2n}(q)$, $n \geqslant 20$ (per ogni q); i gruppi unitari $\mathrm{SU}_{2n}(q^2)$, $\mathrm{SU}_{2n+1}(q^2)$ e i gruppi ortogonali $\Omega_{2n+1}(q)$, $n \geqslant 20$ (q dispari); i gruppi ortogonali $\Omega^-_{2n+2}(q)$, $n \geqslant 24$ (q dispari).

Il secondo risultato significativo riguarda la $(2, 2 \times 2)$-generazione del gruppo degli automorfismi di un gruppo libero di rango finito, per il quale si ottiene la seguente condizione necessaria e sufficiente:

TEOREMA 4. – *Sia F_n un gruppo libero di rango finito n e sia $\mathrm{Aut}(F_n)$ il gruppo degli automorfismi di F_n. Allora $\mathrm{Aut}(F_n)$ è $(2, 2 \times 2)$-generato se e solo se $n \geqslant 5$.*

Considerando inoltre l'azione di $\mathrm{Aut}(F_n)$ su F_n/F_n', che è abeliano libero di rango n, si ha che il gruppo generale lineare $\mathrm{GL}_n(Z)$ è immagine epimorfa di $\mathrm{Aut}(F_n)$ e si deduce dal Teorema precedente una condizione necessaria e sufficiente relativa alla $(2, 2 \times 2)$-generazione di $\mathrm{GL}_n(Z)$.

Il terzo problema considerato nella nostra tesi è quello della $(2, 3)$-generazione di $\mathrm{Aut}(F_n)$, risolto positivamente da M. C. Tamburini e da J. S. Wilson per $n \geqslant 18$ ([5]). Abbiamo contribuito a tale problema dimostrando innanzitutto che anche i gruppi $\mathrm{Aut}(F_{15})$ e $\mathrm{Aut}(F_{16})$ sono $(2, 3)$-generati. Abbiamo inoltre dimostrato che il gruppo generale lineare $\mathrm{GL}_n(Z)$ e, a maggior ragione, $\mathrm{Aut}(F_n)$ non sono $(2, 3)$-generati per $n \leqslant 4$. Tali risultati negativi, per $n \in \{2, 4\}$ sono basati sui seguenti fatti: $\mathrm{GL}_2(Z)$ ha un sottogruppo normale di indice 4 e $\mathrm{GL}_4(2) \simeq A_8$ non è $(2, 3)$-generato. Il caso $n = 3$ ha richiesto un'analisi più approfondita e metodi più sofisticati.

Notiamo infine che i metodi da noi utilizzati, essendo di tipo costruttivo, si prestano ad una eventuale implementazione per il calcolo automatico.

BIBLIOGRAFIA

[1] HAHN A. J. and O'MEARA O. T., *The classical groups and K-theory*, Springer-Verlag (1989).

[2] MALLE G. and SAXL J. and WEIGEL T., *Generation of classical groups*, Geom. Dedicata, no. 1, **49** (1994), 85-116.

[3] MAZUROV V. D. and KHUKHRO E. I., *Unsolved problems in group theory*, 12^a edizione, The Kourovka Notebook (1992).

[4] NUZHIN YA. N., *Generating triples of involutions of Chevalley groups over a finite field of characteristic* 2, Algebra i Logika, no. 2, **29** (1990), 192-206.

[5] TAMBURINI M. C. and WILSON J. S., *On the* $(2, 3)$*-generation of automorphism groups of free groups*, J. London Math. Soc., **29** (1997), 43-48.

Indirizzo: via Fleming 28 - 91014 Castellammare del Golfo (TP); e-mail: zuccap@tin.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Palermo) - Ciclo IX
Direttore di Ricerca: Prof. M. C. Tamburini
(Università Cattolica del Sacro Cuore di Brescia)