BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

ANGELICA ALBERICO

Regolarità delle soluzioni di equazioni ellittiche lineari e non in casi limite

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1999), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 63–66.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_1S_63_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 2-A Suppl. (1999), pag. 63-66

Regolarità delle soluzioni di equazioni ellittiche lineari e non in casi limite.

ANGELA ALBERICO

Oggetto della tesi è lo studio di alcune proprietà di regolarità delle soluzioni del problema di Dirichlet relativo ad equazioni ellittiche, lineari e non. Particolare attenzione è stata dedicata allo studio dei casi limite. Per chiarire cosa si intende con il termine «casi limite», si consideri, a titolo di esempio, il seguente problema modello:

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} u_{x_j})_{x_i} = g & \text{in } \Omega , \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega , \end{cases}$$

dove Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ e i coefficienti a_{ij} sono funzioni misurabili, limitate e soddisfacenti l'ipotesi di uniforme ellitticità:

$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j) \geq \nu |\xi|^2, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \qquad \text{per q.o. } x \in \Omega , \tag{2}$$

con ν costante positiva.

Risultati classici stabiliscono che supposto $g \in L^r(\Omega)$, allora se $2n/(n+2) \leq r < n/2$, $u \in L^q(\Omega)$, dove $q = nr/(n-2r)$, mentre se $r > n/2$, u è hölderiana (cfr. [6]). Per il caso limite $r = n/2$ è stato provato, in particolare, che se $g \in L^{n/2}(\Omega)$, allora u appartiene allo spazio di Orlicz $L_\phi(\Omega)$, generato dalla funzione di Young $\phi(t) = \exp(|t|^{n/(n-2)}) - 1$ (cfr. [4]).

Un modo di raffinare i risultati appena esposti è stato quello di considerare il caso in cui la funzione g appartiene agli spazi di Lorentz $L^{n/2,\, q}(\Omega)$, al variare di q tra 1 e $+\infty$. È stato provato che per $q = 1$, la soluzione u è continua e limitata, mentre per $1 < q \leq \infty$, u appartiene allo spazio di Orlicz $L_{\phi_q}(\Omega)$ generato dalla funzione di Young $\phi_q(t) = e^{|t|^{q'}} - 1$, con $q' = q/(q-1)$ (cfr. [4]). Ciò significa che esiste $\beta > 0$ tale che

$$\int_\Omega e^{\beta |u(x)|^{q'}} dx < +\infty .$$

1. – Regolarità per equazioni lineari.

Le problematiche appena esposte sono state estese al caso di equazioni lineari complete di termini di ordine inferiore. Si consideri il seguente il problema di Dirichlet relativo ad un'equazione ellittica lineare:

$$(3)\qquad \begin{cases} \sum\limits_{i,j=1}^{n} (a_{ij} u_{x_j})_{x_i} + \sum\limits_{i=1}^{n} ((b_i u)_{x_i} + d_i u_{x_i}) + cu = \sum\limits_{i=1}^{n} (f_i)_{x_i} + g & \text{in } \Omega\,, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega\,, \end{cases}$$

dove Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ e i coefficienti a_{ij} sono funzioni misurabili, limitate e soddisfacenti l'ipotesi di uniforme ellitticità (2). Si dimostra che se u è l'unica soluzione del problema (3) e se $|d| \in L^n(\Omega)$, $|b|$, $|f| \in L^{n,1}(\Omega)$ e $c, g \in L^{n/2,1}(\Omega)$, allora u è limitata e continua in Ω (cfr. [3]). Modificando in maniera opportuna le ipotesi sui coefficienti e sui dati, sono stati estesi tali risultati ad un problema ellittico degenere del tipo (3), in cui i coefficienti a_{ij} soddisfano la seguente condizione:

$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j) \geq \nu(x)\, |\xi|^2, \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n, \qquad \text{per q.o. } x \in \Omega\,,$$

dove ν è una funzione avente fissata sommabilità (cfr. [3]). Si dimostrano, poi, stime per u in spazi di Orlicz.

2. – Regolarità per equazioni lineari nel caso bidimensionale.

Risultati analoghi sono stati ottenuti anche per il caso bidimensionale. Si consideri il problema

$$(4)\qquad \begin{cases} \sum\limits_{i,j=1}^{n} (a_{ij} u_{x_j})_{x_i} + cu = g & \text{in } \Omega\,, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega\,, \end{cases}$$

dove Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^2$, i coefficienti a_{ij} sono funzioni misurabili, limitate, soddisfacenti l'ipotesi di uniforme ellitticità (2) e $c(x) \geq 0$ in Ω. Si provano i risultati che seguono (cfr. [2]):

a) se $g \in L \log L(\Omega)$, allora u è limitata e continua in Ω;

b) se $g \in L^{1,q}(\Omega)$, $\|g\|_{1,q} \leq 1$, $1 < q < \infty$, Ω è regolare, ad esempio H_0^1-ammissibile, allora

$$\int_\Omega e^{\beta |u(x)|^{q'}}\, dx \leq c(n)\, |\Omega|\,, \ \forall \beta \leq (4\pi)^{q'};$$

c) se $g \in \mathcal{M}_b(\Omega)$, $\int_\Omega |dg| \leq 1$, Ω è regolare, ad esempio H_0^1-ammissibile, allora

$$\int_\Omega e^{\beta |u(x)|}\, dx \leq \frac{4\pi}{4\pi - \beta}\, |\Omega|\,, \qquad \forall \beta < 4\pi\,.$$

La parte dedicata al caso bidimensionale si conclude con un'applicazione del risultato c) al cosiddetto fenomeno di «blow-up» per problemi del tipo

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}u_{x_j})_{x_i}+cu=V(x)\,e^{u} & \text{in } \Omega\,, \\ u=0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

con $V\in L^p(\Omega)$, $p\in(1,\,+\infty]$.

3. – Equazioni non lineari.

Molte proprietà ottenute per equazioni lineari possono essere ritrovate per una classe di equazioni non lineari. Precisamente, si considerino problemi ellittici non lineari del tipo:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\mathrm{a}(\mathrm{x},\,\mathrm{u},\,\mathrm{Du}))=\operatorname{div} f & \text{in } \Omega\,, \\ u=0 & \text{su } \partial\Omega\,, \end{cases}$$

dove Ω denota un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, $1<p<n$ e la funzione $a:\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ è una funzione di Carathéodory tale che:

$$|a(x,\,\eta,\,\xi)|\leqslant L(1+|\xi|^{p-1}),$$

$$a(x,\,\eta,\,\xi)\,\xi\geqslant\nu|\xi|^{p}.$$

Anche per questo tipo di problemi sono noti risultati di regolarità in casi limite simili a quelli ottenuti nel caso lineare (cfr. [5]). Nella tesi, tenendo conto delle possibili applicazioni a risultati di non esistenza per equazioni contenenti termini che crescono esponenzialmente in u, si estendono al caso non lineare alcune proprietà degli autovalori di problemi lineari. Consideriamo il problema agli autovalori:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}((\mathrm{ADu},\,\mathrm{Du})^{(\mathrm{p}-2)/2}\mathrm{ADu})=\lambda\mathrm{m}(\mathrm{x})\,\mathrm{u}|\mathrm{u}|^{\mathrm{p}-2} & \text{in } \Omega\,, \\ u=0 & \text{su } \partial\Omega\,, \end{cases}$$

dove Ω è un aperto limitato e connesso di $\mathbb{R}^n$, $\lambda>0$, $1<p<n$, $m(x)>0$ è una funzione soddisfacente alcune ipotesi di sommabilità, la matrice $A=\{a_{ij}(x)\}_{i,j=1,\ldots,n}$ è simmetrica e i suoi coefficienti verificano la condizione di uniforme ellitticità. Si dimostra che il primo autovalore λ_p è semplice e che verifica una disuguaglianza tipo *Faber-Krahn* (cfr. [1]). Inoltre, si dimostra una disuguaglianza tipo *Payne-Rayner* la quale stabilisce che se u è un'autofunzione positiva del problema (4) corrispondente al primo autovalore λ_p, allora

$$\int_{\Omega} m^*u^{*^r}\,dt\leqslant\beta\int_{\Omega} m^*u^{*^q}\,dt\,,$$

dove $0 < q < r \leqslant \infty$, $\beta = \beta(n, q, r, p, \lambda_p)$ è una costante e m^* e u^* denotano, rispettivamente i riordinamenti decrescenti di m e u (cfr. [1]).

BIBLIOGRAFIA

[1] ALBERICO A., FERONE A. and VOLPICELLI R., *Some properties for eigenvalues and eigenfunctions of nonlinear weighted problems*, Liguori Editore, Preprint n. 42 (1997), in corso di stampa su Rend. Mat., Roma.

[2] ALBERICO A. and FERONE V., *Regularity properties of solutions of elliptic equations in* $\mathbb{R}^2$ *in limit cases*, Atti Acc. Naz. Lincei **s.9, v.6** (1995), 237-250.

[3] ALBERICO A. - RICCIARDI T., *Continuity properties for linear elliptic equations with lower-order terms*, Rend. Acc. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **63** (1996), 7-16.

[4] ALVINO A., *Formule di maggiorazione e regolarizzazione per soluzioni di equazioni ellittiche del secondo ordine in un caso limite*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) **52** (1977), 335-340.

[5] FERONE V. and FUSCO N., *Continuity properties of minimizers of integral functionals*, J. Math. Anal. Appl., **202** (1996), 27-52.

[6] STAMPACCHIA G., *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre a coéfficients discontinus*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **15** (1965), 189-258.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Napoli «Federico II»
e-mail: alberico@matna3.dma.unina.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Napoli) - Ciclo IX
Direttore di ricerca: Prof. Angelo Alvino, Università di Napoli «Federico II»