Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Francesca G. Alessio

Potenziali ad oscillazione lenta e dinamica multibump per una classe di sistemi Lagrangiani

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1999), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 67–70.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_1S_67_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 2-A Suppl. (1999), pag. 67-70

Potenziali ad oscillazione lenta e dinamica multibump per una classe di sistemi Lagrangiani.

FRANCESCA G. ALESSIO

La tesi tratta il problema dell'esistenza e della molteplicità di soluzioni omocline per una classe di sistemi Lagrangiani modellati sull'equazione di Duffing. Si consideri per semplicità

$$(D_\alpha) \qquad \ddot{u}(t) = u(t) - \alpha(t)\,|u(t)|^2 u(t) \qquad t \in \mathbf{R},\ u(t) \in \mathbf{R}^N,$$

dove α è funzione positiva limitata. Tale sistema presenta un punto di equilibrio iperbolico nell'origine del piano delle fasi. Sono soluzioni omocline di (D_α) quelle soluzioni che nello spazio delle fasi risultano asintotiche a tale equilibrio per $t \to \pm\infty$.

L'esistenza di soluzioni omocline e la loro rilevanza nello studio dei sistemi dinamici fu evidenziata da H. Poincaré nei suoi studi sulla meccanica celeste. Tali considerazioni vennero poi approfondite prima da G. D. Birkhoff e successivamente da S. Smale, [4], i quali riuscirono a mostrare che la presenza di una omoclina *trasversa* implica l'esistenza di una dinamica complessa.

Si consideri ad esempio il sistema (D_α) con α T-periodica. In questo caso, la dinamica di (D_α) può essere descritta dalla mappa di Poincaré $\Phi : \mathbf{R}^{2N} \to \mathbf{R}^{2N}$ definita da $\Phi(u, v) = (u(T), \dot{u}(T))$, dove $u(t)$ è la soluzione di (D_α) relativa alle condizioni iniziali $u(0) = u$ e $\dot{u}(0) = v$. Tale diffeomorfismo presenta un punto fisso iperbolico nell'origine (i.e., $\Phi(0) = 0$ e $D\Phi(0)$ non ha autovalori di modulo 1) e le soluzioni omocline di (D_α) corrispondono alle intersezioni delle varietà stabile ed instabile associate all'origine

$$\mathcal{W}^{\pm}(0) = \{(u, v) \in \mathbf{R}^{2N} \,|\, \Phi^n(u, v) \to 0 \ \text{ per } n \to \pm\infty\}.$$

Il Teorema di Smale-Birkhoff afferma che ogni diffeomorfismo Φ su $\mathbf{R}^{2N}$ con un punto fisso iperbolico p, le cui varietà stabile ed instabile si intersecano *trasversalmente*, ammette un sottosistema topologicamente coniugato al sistema determinato dallo shift di Bernoulli, $\sigma : \{0, 1\}^{\mathbf{Z}} \to \{0, 1\}^{\mathbf{Z}}$, definito da $\sigma(s)_j = s_{j+1}$, prototipo dei sistemi caotici.

Qualora si riesca a stabilire che le varietà stabile ed instabile si intersecano in modo trasverso, la dinamica di Φ potrà essere descritta per coniugazione dalla dinamica dello shift di Bernoulli e poiché tale sistema ammette, come è facile verificare, un insieme numerabile di soluzioni periodiche, un insieme numerabile di soluzioni omocline ed un insieme non numerabile di soluzioni non periodiche limitate, lo stesso varrà per il diffeomorfismo Φ. In particolare, la dinamica di Φ esibirà una dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali, caratteristica fondamentale dei sistemi caotici.

Negli ultimi anni, a partire dal lavoro di V. Coti Zelati, I. Ekeland and E. Séré

[1], i metodi variazionali sono stati applicati con successo nello studio della molteplicità del problema omoclino. Tali metodi sono risultati particolarmente adatti alla determinazione di caratteristiche caotiche sotto ipotesi di non degenerazione sull'insieme delle soluzioni omocline più deboli della classica condizione di trasversalità. Risulta fondamentale in questo contesto il lavoro di E. Séré [3], dove, partendo dallo studio del problema omoclino, si mostra l'esistenza di una particolare classe di soluzioni, chiamate soluzioni *multibump*, la cui presenza implica sensibile dipendenza dalle condizioni iniziali. Più precisamente, relativamente al sistema (D_a), in [3], si mostra che se a è T-periodica e se

(∗) *l'insieme delle soluzioni omocline* è *al più numerabile*

allora il sistema ammette soluzioni multibump, ovvero

esiste una soluzione omoclina u tale che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ tale che ad ogni $J \subseteq \mathbf{Z}$ ed ad ogni successione $p = (p_j)_{j \in J} \subseteq \mathbf{Z}$ con $p_{j+1} - p_j \geqslant N(\varepsilon)$ $(j \in J)$ corrisponde una soluzione u_p soddisfacente

$$\left| u_p(t) - \sum_{j \in J} u(t - p_j T) \right| \leqslant \varepsilon , \qquad \forall t \in \mathbf{R} .$$

In particolare, se J è finito, allora u_p è soluzione omoclina.

Anche se tale risultato non ricopre completamente il Teorema di Smale-Birkhoff, esso implica che il sistema ammette una dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali. Inoltre, osserviamo che la condizione (∗) risulta verificata ogni qualvolta le intersezioni tra varietà stabile ed instabile sono trasverse e che se tale condizione non risulta soddisfatta, allora l'insieme delle soluzioni omocline risulta non numerabile.

Il metodo sviluppato da Séré ispirò molti successivi lavori di ricerca e permise da un lato di considerare condizioni di non degenerazione più deboli della condizione (∗), e dall'altro di considerare sistemi con dipendenze temporali più generali della periodicità, come ad esempio il caso almost periodico. Si osservi che per dipendenze temporali generali i metodi geometrici risultano difficilmente applicabili venendo a mancare una corrispondente mappa di Poincaré.

I risultati sopra esposti richiedono delle ipotesi a priori sull'insieme delle soluzioni omocline che risultano in generale difficilmente verificabili. La condizione di intersezione trasversa viene provata classicamente usando la funzione di Melnikov per *piccole* perturbazioni periodiche di sistemi integrabili. Negli ultimi anni, il metodo di Melnikov è stato generalizzato a sistemi di qualunque dimensione e con dipendenze temporali arbitrarie del termine perturbativo, purché il sistema autonomo imperturbato ammetta una soluzione omoclina non degenere modulo traslazioni in senso opportuno.

Nella tesi sono stati considerati sistemi ad oscillazione lenta ed è stato provato che in questo caso è possibile evitare le tecniche di tipo Melnikov per provare condizioni di discretezza sulle soluzioni omocline usando metodi variazionali globali. Ciò è stato ottenuto senza fare ipotesi sulle soluzioni omocline del sistema autonomo imperturbato, grazie a fenomeni di concentrazione delle soluzioni rispetto all'oscillazione lenta della Lagrangiana. Un ulteriore studio ha permesso poi di usare perturbazioni ad oscillazione lenta per provare che sistemi del tipo (D_α) ammettono soluzioni multibump genericamente rispetto a funzioni α almost periodiche non negative ed inoltre per funzioni α limitate. Quest'ultimo risultato è stato provato nel ambito più generale di (sistemi di) equazioni semilineari ellittiche su $\mathbf{R}^N$. In ciò che segue vedrò di esporre più in dettaglio i risultati ottenuti nella tesi.

Nella tesi sono stati considerati sistemi Lagrangiani più generali del sistema (D_α), anche se, per semplicità, mi limiterò ad esporre i risultati per quest'ultimo.

Come primo problema, si è considerato il caso in cui $\alpha \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ sia positiva ed oscilli lentamente a $+\infty$, i.e., verifichi la condizione

$$(\alpha_+) \lim_{t\to+\infty} \dot{\alpha}(t) \to 0 \quad \text{e} \quad 0 < \liminf_{t\to+\infty} \alpha(t) < \limsup_{t\to+\infty} \alpha(t).$$

Ad esempio, sia α asintotica alla funzione $2 + \sin\sqrt{t}$ per $t \to +\infty$.

È stato provato che l'oscillazione lenta della Lagrangiana determina una discretizzazione dell'insieme delle soluzioni omocline del sistema tale da rendere applicabili tecniche del tipo di quelle sviluppate in [3] per ottenere il seguente primo risultato.

TEOREMA 1. – *Se $\alpha \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ è positiva e soddisfa (α_+), allora il sistema (D_α) ammette infinite soluzioni multibump.*

L'interesse principale di tale Teorema sta nel fatto che il risultato non necessita di ipotesi a priori sull'insieme delle soluzioni omocline e l'esistenza di una dinamica complessa è leggibile direttamente dai dati. Per provare condizioni di discretezza dell'insieme omoclino (analoghe dell'ipotesi $(*)$), necessarie all'applicabilità delle tecniche introdotte in [3], non possono dunque essere utilizzati (soprattutto per sistemi più generali di (D_α)) metodi di tipo Melnikov. Tale condizione viene direttamente provata, usando il principio di compattezza per concentrazione, [2], grazie a fenomeni di localizzazione delle soluzioni omocline rispetto alle oscillazione lenta della Lagrangiana.

Tali tecniche possono essere facilmente applicate ai sistemi della forma $\ddot{u} = u - \alpha(\omega t)\,|u|^2 u$, con α non costante e periodica (o più in generale almost periodica) purché ω risulti sufficientemente piccolo. In effetti, si è provato che la presenza di un termine ad oscillazione lenta nel campo è sufficiente a garantire condizioni di discretezza dell'insieme omoclino, condizione base per l'esistenza di soluzioni multibump. Più precisamente, considerati i sistemi

$$(D_\omega) \qquad \ddot{u} = u - (a(t) + \alpha(\omega t))\,|u|^2 u\,, \qquad t \in \mathbf{R},\ u \in \mathbf{R}^N$$

si è provato

TEOREMA 2. – *Per ogni $a \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ non negativa, almost periodica e per ogni $\alpha \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ non costante, positiva e almost periodica, esiste $\overline{\omega} > 0$ tale che per ogni $\omega \in (0, \overline{\omega})$ il sistema (D_ω) ammette soluzioni multibump.*

Dal Teorema 2, poichè non è richiesta alcuna condizione sulla norma L^∞ di α, si ottiene immediatamente che l'insieme delle funzioni almost periodiche a per le quali il sistema (D_a) ha un insieme «discreto» di omocline, e quindi ammette dinamica multibump, è denso rispetto alla topologia L^∞ nell'insieme di tutte le funzioni almost periodiche positive. In effetti, essendo la condizione di discretezza stabile rispetto a piccole perturbazioni del campo, si ottiene che tale insieme è anche aperto.

TEOREMA 3. – *Esiste un sottoinsieme aperto e denso* $\mathcal{A}$ *di* $\{a \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \mid a$ *è* almost periodica e $a(t) > 0, \forall t \in \mathbf{R}\}$ *tale che per ogni* $a \in \mathcal{A}$ *il sistema* (D_a) *ammette soluzioni multibump.*

Come già sottolineato, l'argomento cruciale utilizzato per provare il Teorema 0.3 è che il termine perturbativo ad oscillazione lenta $\alpha(\omega \cdot)$ permette di discretizzare (in modo stabile) l'insieme delle soluzioni omocline del sistema perturbato (D_ω). Ciò può essere fatto in generale per ogni $a \in L^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}^+)$, scegliendo opportunamente la perturbazione lenta α. Tale costruzione può essere fatta nel caso più generale di (sistemi di) equazioni semilinari ellittiche e costituisce l'ultima parte della tesi.

Si consideri il problema semilineare ellittico

$$(P_a) \qquad -\Delta u(x) + u(x) = a(x)\,|u(x)|^2 u(x) \qquad u \in H^1(\mathbf{R}^N, \mathbf{R})$$

dove $a \in L^\infty(\mathbf{R}^N, \mathbf{R})$, $a(x) \geq a_0 > 0$ per q.o. $x \in \mathbf{R}^N$.

Tale tipo di problema è stato studiato con varie tecniche in numerosi lavori e differenti risultati di esistenza sono stati provati. Infatti, l'esistenza di soluzioni non banali del problema (P_a) dipende fortemente dal comportamento del coefficiente a. In tale direzione, estendendo i risultati sopra esposti, nella tesi è stato provato che l'esistenza di infinite soluzioni del problema (P_a) è di fatto una proprietà generica rispetto al coefficiente $a \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$, $a \geq 0$ q.o. in $\mathbf{R}^N$. Precisamente si è provato

TEOREMA 4. – *Esiste un insieme* $\mathcal{A}$ *aperto e denso in* $\{a \in L^\infty(\mathbf{R}^N) \colon a \geq 0\}$ *tale che per ogni* $a \in \mathcal{A}$ *il problema* (P_a) *ammette infinite soluzioni.*

BIBLIOGRAFIA

[1] V. COTI ZELATI, I. EKELAND and E. SÉRÉ, *A variational approach to homoclinic orbits in Hamiltonian systems*, Math. Ann., **288** (1990), 133-160.

[2] P.L. LIONS, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, Part I and II*, Ann. IHP Anal. Nonlinéaire, **1** (1984), 109-145 and 223-283.

[3] E. SÉRÉ, *Looking for the Bernoulli shift*, Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire, **10** (1993), 561-590.

[4] S. SMALE, *Differentiable dynamical systems*, Bull. Amer. Math. Soc., **73** (1967), 747-871.

Dipartimento di Matematica, Politecnico di Torino; e-mail: alessio@dm.unito.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Torino) - Ciclo IX
Direttore di ricerca: Prof. E. Serra, Politecnico di Torino