Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Marta Calanchi

Soluzioni periodiche e asintoticamente periodiche per una classe di equazioni differenziali del secondo ordine

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1999), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 75–78.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_1S_75_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 2-A Suppl. (1999), pag. 75-78

Soluzioni periodiche e asintoticamente periodiche per una classe di equazioni differenziali del secondo ordine.

MARTA CALANCHI

Questa tesi è dedicata ad alcune applicazioni delle tecniche variazionali a problemi di esistenza e molteplicità di soluzioni periodiche e asintoticamente periodiche per una classe di equazioni scalari della forma

$$\ddot{u} + G'(t, u(t)) = h(t), \tag{1}$$

dove G e h sono funzioni sufficientemente regolari e *periodiche* in t e u.

L'esempio più familiare di equazioni del tipo (1) è dato dall'equazione del pendolo forzato

$$\ddot{u} + a \sin u = h \tag{2}$$

che costituisce un problema modello nello studio dell'analisi non lineare e dei sistemi dinamici (cfr. [1]). Per questo motivo il primo Capitolo di questa tesi è interamente dedicato ad una breve discussione su alcune problematiche connesse all'equazione (2): il problema dell'esistenza e della molteplicità delle soluzioni periodiche e di altre soluzioni. Viene inoltre fatto un rapido accenno ad alcuni metodi adottati in letteratura per lo studio di questo tipo di equazioni, e in particolare ai metodi variazionali su cui è basata questa tesi. Si descrive infatti come lo studio dell'esistenza di soluzioni T-periodiche per (1) possa essere ricondotto allo studio dei punti critici del funzionale

$$I_h(u) = \int_0^T \left[\frac{1}{2} \dot{u}^2 - G(t, u) + hu \right] dt$$

definito sullo spazio di Sobolev H_T^1 delle funzioni T-periodiche in H_{loc}^1.

Nel secondo Capitolo viene proposta la descrizione di un nuovo metodo applicabile a svariati tipi di problemi connessi all'equazione (1). Questo approccio, chiamato metodo di riduzione (cfr. [2]), è strettamente legato al metodo di Lyapunov-Schmidt (al quale si accenna nel primo Capitolo), ma presenta il vantaggio che il problema ridotto è ancora variazionale: si tratta di cercare gli estremi di una funzione di una sola variabile reale. In questo metodo, dato l'iperpiano $\xi + H_0$ di H_T^1 (dove H_0 è lo spazio delle funzioni T-periodiche a media nulla), si considerano solo gli elementi che minimizzano la restrizione del funzionale I_h su questo iperpiano, e quindi ci si concentra sul funzionale ridotto φ_h e si mettono in relazione i punti critici di φ_h con quelli di I_h.

Le proprietà della funzione φ_h, studiate nel secondo Capitolo, verranno utilizzate nei Capitoli successivi.

Nel terzo Capitolo si considera il problema periodico

$$\ddot{u} + G'(u) = h + \lambda\,, \qquad \lambda \in \mathbf{R} \tag{3}$$

dove G è una funzione regolare S-periodica e h è una funzione T-periodica a media nulla.

È ben noto che il problema è risolubile per λ in un intervallo R_h chiuso e limitato contenente lo zero. In questo Capitolo si studia la molteplicità esatta delle soluzioni T-periodiche quando λ varia in R_h.

Nel caso dell'equazione del pendolo ($G(u) = -a \cos u$), il problema è stato risolto da G. Tarantello ([3]) anche in presenza di un termine dissipativo nell'equazione. In [3], imponendo qualche restrizione sul periodo T e sul termine forzante h, e sfruttando le proprietà analitiche della funzione $\sin x$, viene fornito un risultato sul numero esatto di soluzioni dell'equazione.

L'argomento chiave consiste nel fatto che per h «piccolo», la situazione non è molto differente dal caso $h \equiv 0$, dove la condizione «T piccolo» garantisce che le soluzioni sono costanti e possono essere calcolate esplicitamente. In particolare, per $h = 0$, il numero delle soluzioni dell'equazione si comporta esattamente come il numero delle controimmagini della funzione $\sin x$ su $[0, 2\pi)$.

Partendo da questa osservazione, il nostro scopo è di mostrare un risultato analogo per una classe più ampia di non linearità periodiche. Innanzitutto, in un caso più generale, non potendo sfruttare la forma esplicita della non linearità, è necessario riesprimere in un modo conveniente l'enunciato del risultato descritto in [3]. A tal fine si utilizza la funzione di riduzione φ_h descritta nel secondo Capitolo. Il legame tra il nostro problema e la funzione di riduzione è dato dalla proprietà fondamentale secondo la quale, quando

$$\max G'' < \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2,$$

le soluzioni del problema periodico (3) sono in corrispondenza biunivoca con le soluzioni (in ξ) dell'equazione

$$\varphi_h'(\xi) = -T\lambda\,.$$

Naturalmente avremo bisogno di condizioni di non degeneratezza sulla non linearità G, che sarebbero necessarie anche per ottenere un risultato perturbativo (richiederemo in particolare che G' sia una funzione di Morse). Segnaliamo che il Teorema principale del Capitolo 3 non è di tipo perturbativo, in quanto vengono fornite stime *esplicite* su h e T che assicurano la validità del risultato.

Nel quarto Capitolo viene discusso un problema di esistenza di soluzioni asintoticamente periodiche per l'equazione (1), sotto l'ipotesi di reversibilità rispetto al tempo t del potenziale. Precisamente si cercano soluzioni omocline ed eterocline a orbite periodiche, cioè soluzioni che all'infinito convergono a soluzioni periodiche.

Negli ultimi anni l'esistenza e la molteplicità di orbite omocline ed eterocline a soluzioni costanti (tipicamente alla soluzione identicamente nulla) è stata provata grazie all'utilizzo dei metodi variazionali, anche in casi più generali, quali i sistemi Hamiltoniani e le equazioni ellittiche semilineari. Il vantaggio è costituito dal fatto che in questo caso è possibile lavorare negli usuali spazi di Sobolev (e quindi in spazi di funzioni integrabili su $\mathbf{R}$).

La ricerca di soluzioni omocline ed eterocline a orbite periodiche non costanti è sicuramente non banale. Una prima difficoltà è data dal fatto che, in questo caso, il problema non può essere interpretato variazionalmente in modo naturale (si tratta di lavorare con spazi di funzioni che, per esempio, non sono integrabili). In [4] P. H. Rabinowitz ha superato questa difficoltà per il caso di un sistema Hamiltoniano con potenziale periodico costruendo un funzionale «ad hoc», i cui minimi, su una classe di funzioni opportuna, sono soluzioni eterocline a soluzioni periodiche. Questo approccio richiede un'ipotesi di reversibilità del potenziale rispetto al tempo e un'ipotesi sull'isolatezza dei minimi assoluti del funzionale d'azione associato al problema periodico.

Partendo da questo risultato, si è investigato innanzitutto il caso di un'equazione scalare, chiedendosi se fosse possibile attenuare l'ipotesi di isolatezza, sostituendola con una condizione più debole (ad esempio richiedendo che esistesse una coppia di «minimi consecutivi separati»). Successivamente si è analizzato il problema dell'esistenza di una soluzione omoclina ad una stessa orbita periodica, sempre per un'equazione scalare. Nel primo caso, usando un argomento di minimizzazione vincolata, è stato possibile ottenere l'esistenza di un'orbita eteroclina tra due orbite periodiche «consecutive». Nel secondo caso, è stato necessario introdurre un'ipotesi supplementare di non degeneratezza riguardante l'insieme delle orbite eterocline trovate precedentemente. Anche qui si è utilizzato un argomento di minimizzazione vincolata che ha permesso di ottenere non solo un risultato di esistenza di un'orbita omoclina, ma anche di molteplicità di queste orbite.

Vale la pena di osservare che la seconda ipotesi di non degeneratezza è «quasi» necessaria: si forniscono infatti esempi di problemi in cui essa non è soddisfatta e che non ammettono soluzioni omocline.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. Mawhin, *The forced pendulum: a paradigm for nonlinear analysis and dynamical systems*, Expo. Math., **6** (1988), 271-287.

[2] E. Serra and M. Tarallo, *A reduction method for periodic solutions of second order subquadratic equations*, Advances Diff. Equations; in corso di pubblicazione.

[3] G. TARANTELLO, *On the number of solutions for the forced pendulum equation*, J. Diff. Eq., **80** (1989), 79-93.
[4] P. H. RABINOWITZ, *Heteroclinics for a reversible Hamiltonian system*, Ergod. Th. & Dynam. Sys., 14 (1994), 817-829.

Dipartimento di Matematica, Politecnico di Torino; e-mail: calanchi78dm.unito.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Torino) - Ciclo IX
Direttore di ricerca: Prof. E. Serra, Politecnico di Torino