Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Filippo Cammaroto

Un complemento al principio variazionale di Ekeland e sue applicazioni

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1999), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 79–82.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_1S_79_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 2-A Suppl. (1999), pag. 79-82

Un complemento al principio variazionale di Ekeland e sue applicazioni.

FILIPPO CAMMAROTO

1. – Introduzione.

Sin dalla sua apparizione, il principio variazionale di Ekeland ha assunto, grazie alla sua estrema generalità e maneggevolezza, un ruolo primario tra gli strumenti-chiave utilizzati in diversi settori dell'analisi matematica odierna. L'analisi non-lineare, l'analisi convessa, il calcolo differenziale generalizzato, il calcolo delle variazioni, la teoria del controllo e dell'ottimizzazione sono solo alcuni dei campi in cui il principio di Ekeland trova importanti applicazioni.

Siano (X, d) uno spazio metrico completo, $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione ed ε un numero reale positivo. Si ponga:

$$E_{f,\varepsilon} = \{ y \in X : f(y) < f(x) + \varepsilon d(x, y) \ \forall x \in X, \ x \neq y \}.$$

Il classico principio variazionale di Ekeland afferma che, per ogni $\varepsilon > 0$ ed ogni $x_\varepsilon \in X$ soddisfacente la condizione $f(x_\varepsilon) < \inf_X f + \varepsilon$, esiste un punto $y_\varepsilon \in E_{f,\varepsilon}$ tale che $f(y_\varepsilon) \leq f(x_\varepsilon)$ e $d(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq 1$. Pertanto, il principio variazionale di Ekeland garantisce, in particolare, che, nelle ipotesi dette, l'insieme $E_{f,\varepsilon}$ è non vuoto per ogni $\varepsilon > 0$.

Nel contesto degli spazi di Banach, a partire da questo risultato, abbiamo stabilito una proprietà qualitativa dell'insieme $E_{f,\varepsilon}$ pur tralasciando l'aspetto della localizzazione presente invece nella tesi del principio di Ekeland. Tale proprietà qualitativa è espressa nel Teorema 1 del prossimo paragrafo.

2. – Il complemento al principio di Ekeland.

TEOREMA 1. – *Siano X uno spazio di Banach reale ed $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione semicontinua inferiormente e limitata inferiormente. Supponiamo che*

$$\limsup_{\|x\| \to +\infty} \frac{f(x)}{\|x\|} < +\infty.$$

Allora, per ogni $\varepsilon > \limsup_{\|x\| \to +\infty} \frac{f(x)}{\|x\|}$, l'inviluppo convesso dell'insieme $E_{f,\varepsilon}$ è denso in X.

L'importanza di questo risultato risiede nel significato che assume di volta in volta l'insieme $E_{f,\varepsilon}$ nelle applicazioni.

3. – Applicazioni.

Un classico risultato strettamente legato al principio variazionale di Ekeland è il teorema di punto fisso di Caristi il quale afferma che, se f è una funzione di uno spazio di Banach in sè, e se φ è un funzionale non negativo, semicontinuo inferiormente su X tale che

$$\|x - f(x)\| \leqslant \varphi(x) - \varphi(f(x))$$

per ogni $x \in X$, allora f ha almeno un punto fisso.

In questo contesto, ciò è dovuto al fatto che, per ogni $\varepsilon \in]0, 1]$, si ha

$$E_{f,\varepsilon} \subseteq \{x \in X : f(x) = x\}.$$

Pertanto, utilizzando il Teorema 1, si ottiene il seguente più preciso risultato.

TEOREMA 2. – *Sia X uno spazio di Banach reale e sia $f : X \to X$ una data funzione. Se esiste un funzionale φ, limitato inferiormente e semicontinuo inferiormente su X, soddisfacente le condizioni*

$$\limsup_{\|x\| \to +\infty} \frac{\varphi(x)}{\|x\|} < 1$$

e

$$\|x - f(x)\| \leqslant \varphi(x) - \varphi(f(x))$$

per ogni $x \in X$, allora l'inviluppo convesso dell'insieme dei punti fissi di f è denso in X.

Un altro dei risultati più importanti che scaturisce dal principio di Ekeland riguarda i funzionali derivabili secondo Gâteaux. Precisamente, se f è un funzionale semicontinuo inferiormente, limitato inferiormente e derivabile secondo Gâteaux su uno spazio di Banach reale X, allora, per ogni $\varepsilon > 0$, l'insieme

$$\{x \in X : \|f'(x)\|_{X^*} \leqslant \varepsilon\}$$

(ove f' è la derivata secondo Gâteaux di f) è non vuoto.

In tale contesto, ciò deriva dalla seguente inclusione

$$E_{f,\varepsilon} \subseteq \{x \in X : \|f'(x)\|_{X^*} \leqslant \varepsilon\}.$$

Pertanto, alla luce del Teorema 1, si può ottenere adesso un risultato più preciso.

TEOREMA 3. – *Sia X uno spazio di Banach reale, e sia f un funzionale semicontinuo inferiormente, limitato inferiormente e derivabile secondo Gâteaux su X soddisfacente la condizione*

$$\limsup_{\|x\| \to +\infty} \frac{f(x)}{\|x\|} < +\infty .$$

Allora, per ogni $\varepsilon > \limsup_{\|x\| \to +\infty} \frac{f(x)}{\|x\|}$, *l'inviluppo convesso dell'insieme*

$$\{x \in X : \|f'(x)\|_{X^*} \leq \varepsilon\}$$

è denso in X.

A partire da questo risultato è possibile ricavare il seguente corollario.

TEOREMA 4. – *Sia X uno spazio di Banach reale, e sia f un funzionale semicontinuo inferiormente, limitato inferiormente, derivabile secondo Gâteaux su X e tale che il funzionale* $\|f'(\cdot)\|_{X^*}$ *sia quasi convesso e semicontinuo inferiormente su X. Allora, si ha*

$$\sup_{x \in X} \|f'(x)\|_{X^*} \leq \limsup_{\|x\| \to +\infty} \frac{f(x)}{\|x\|} .$$

Applicando opportunamente il Teorema 4, è stato ricavato un teorema «alla Liouville» per funzioni armoniche definite su domini esterni. Infatti il classico teorema di Liouville non è valido per funzioni armoniche definite su tali domini, come si vede facilmente considerando $r > 0$ e la funzione $f : \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}(0, r) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \qquad \forall (x, y) \in \overline{B}(0, r),$$

che risulta essere armonica e limitata inferiormente ma ovviamente non costante. Risulta naturale, pertanto, porsi il problema di trovare condizioni aggiuntive sulla funzione per garantire la validità della tesi del teorema di Liouville. Il risultato che è stato stabilito in questa direzione è il seguente.

TEOREMA 5. – *Sia K un compatto convesso di* $\mathbb{R}^2$ *e sia* $f : \mathbb{R}^2 \setminus K \to \mathbb{R}$ *una funzione armonica e limitata inferiormente. Supponiamo inoltre che*

$$\lim_{\|(x, y)\| \to +\infty} \frac{f(x, y)}{\|(x, y)\|} = 0 . \tag{1}$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la funzione f sia costante è *che*

$$|\nabla f(x, y)| \, |\nabla f_{xx}(x, y)| \leqslant |\nabla f_x(x, y)|^2$$

per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus K$.

La prova di questo risultato poggia sia sul Teorema 3 (o meglio su una sua variante per funzioni definite su complementari di insiemi chiusi e limitati) sia su un classico criterio di convessità per funzioni di due variabili sia ovviamente sull'armonicità della funzione.

Al presente, non sembra noto se il Teorema 5 continui a sussistere senza l'ipotesi (1).

BIBLIOGRAFIA

[1] CAMMAROTO F. and CHINNÌ A., *A complement to Ekeland's variational principle in Banach spaces*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, 44 (1996), 29-33.
[2] DE FIGUEIREDO D.G., *The Ekeland variational principle with applications and detours*, Tata Institute of Fundamental Research, Bonbay, (1989).
[3] EKELAND I., *Nonconvex minimization problems*, Bull. Amer. Math. Soc., 1 (1979), 443-474.

Dipartimento di Matematica, Università di Messina; e-mail: filippo@dipmat.unime.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Palermo) - Ciclo VIII
Direttore di ricerca: Prof. Biagio Ricceri, Università di Catania