Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Anna De Simone

Decomposizione di funzioni additive definite in strutture ortomodulari: il problema dell'unicità

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1999), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 95–98.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_1S_95_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 2-A Suppl. (1999), pag. 95-98

Decomposizione di funzioni additive definite in strutture ortomodulari: il problema dell'unicità.

ANNA DE SIMONE

Nell'ambito della teoria classica della misura, sono noti vari **teoremi di decomposizione** per funzioni additive. Citiamo come esempi quelli di Lebesgue e di Hewitt-Yosida. Il primo riguarda la possibilità di decomporre una funzione additiva come somma di due parti: una assolutamente continua rispetto ad una funzione fissata, l'altra singolare rispetto a quest'ultima. Il secondo permette di scrivere una funzione finitamente additiva come somma di una parte numerabilmente additiva e di una puramente finitamente additiva.

I vari tipi di teoremi di decomposizione hanno un denominatore comune: si parte con il considerare una certa proprietà: nel caso della decomposizione di Lebesgue, l'assoluta continuità rispetto ad una certa funzione, nel caso della decomposizione di Hewitt-Yosida la numerabile additività; supposto che la funzione in esame non abbia la proprietà suddetta, la si spezza in due (a volte in più) parti, in maniera da selezionare un addendo con la proprietà voluta ed una parte rimanente, che di solito si richiede essere quanto più possibile "lontana" dal possederla. Scopo principale di questa tesi è lo studio di alcuni teoremi di decomposizione nell'ambito di funzioni additive definite su strutture che generalizzano le algebre Booleane.

L'interesse per questo tipo di strutture, dette ortomodulari, è iniziato già negli anni '50, quando, con l'apparire del lavoro di von Neumann [5], è stata messa in luce l'inadeguatezza delle algebre di Boole per la rappresentazione di alcuni fenomeni riguardanti la fisica quantistica. Poiché la proprietà distributiva tra elementi di un'algebra corrisponde da un punto di vista fisico alla possibilità di osservare contemporaneamente diversi fenomeni, questa proprietà viene meno nelle **strutture ortomodulari** (insiemi dotati di relazione d'ordine e di un'operazione interna analoga al complemento insiemistico), nelle quali le operazioni di estremo inferiore e superiore non sono distributive l'una rispetto all'altra.

Numerosi studiosi si sono interessati a questo settore della teoria della misura; una volta riformulate in maniera adatta le definizioni, è stato possibile estendere in quest'ambito più generale alcuni dei teoremi noti nel caso Booleano. Per quanto riguarda i teoremi di decomposizione si sono ottenuti, in ipotesi "ragionevoli", risultati di esistenza ([1]) ma non di unicità (che valgono nel caso Booleano). Il motivo risiede nel fatto che per funzioni definite su strutture ortomodulari la situazione "standard" è l'esistenza di più decomposizioni, ossia la mancanza di unicità. Di qui la necessità di trovare condizioni sufficienti ad assicurarla. Uno studio di questo tipo è stato iniziato da Rüttimann ([4]), che si è interessato di decomposizioni tipo Hewitt-Yosida. I suoi risultati sono stati generalizzati in questa tesi seguendo una duplice direzione: da un lato estendendo il tipo di decomposizione studiato, dall'altro generalizzando le strutture su cui le funzioni sono definite.

Il tipo di decomposizione studiato è abbastanza generale da comprendere come casi particolari sia il teorema di decomposizione di Lebesgue, che quello di Hewitt-Yosida. Tale carattere di generalità è stato possibile grazie al lavoro [3], originato da un risultato di Shultz del '74: lo spazio degli stati (misure di probabilità finitamente additive) di un poset ortomodulare è omeomorfo ad un sottoinsieme compatto e convesso di uno spazio vettoriale topologico di Hausdorff localmente convesso. Tale risultato ha permesso di studiare il problema della decomposizione usando un diverso punto di vista: in primo luogo il problema di decomporre una funzione additiva come somma di due funzioni si traduce in quello, analogo, di decomporre uno stato come combinazione convessa di due stati. Rappresentando poi ogni stato con un punto in un certo insieme convesso compatto, il problema diventa quello di ottenere tale punto come appartenente ad un segmento con gli estremi su certi insiemi prefissati. Il vantaggio di questo metodo consiste principalmente nella possibilità di visualizzare il problema.

Si sono studiate decomposizioni rispetto ad opportune facce dello spazio degli stati e si sono ottenuti come corollari i risultati di Rüttimann. L'idea è la seguente: si fissa un sottoinsieme F di tale spazio (che è una faccia o un'unione di facce), si costrusce, a partire da esso, un altro sottoinsieme dello spazio degli stati (denotato con $F^{\#}$ e che é anch'esso un'unione di facce) e si cerca di ottenere tutto lo spazio a partire da combinazioni convesse di elementi di F e $F^{\#}$ (dunque ottenere ogni punto come parte di un segmento con un estremo in F e l'altro in $F^{\#}$). Tenendo presente che il risultato di Shultz ha un viceversa (ogni parte convessa e compatta di uno spazio vettoriale topologico di Hausdorff localmente convesso è, a meno di omeomorfismi, lo spazio degli stati di un poset ortomodulare), si può intuire a partire da semplici esempi su $\mathbb{R}^2$ che, in genere, le decomposizioni non sono uniche. Si intuisce quindi la necessità di condizioni supplementari per ottenere l'unicitá delle decomposizioni, e la struttura molto particolare dello spazio degli stati delle algebre Booleane.

Fin qui le generalizzazioni riguardanti il tipo di decomposizione (detta F-decomposizione, se F è la faccia rispetto alla quale si lavora). Per quanto riguarda le strutture di partenza, i risultati ottenuti sono relativi a funzioni definite sui cosiddetti **WOOMPs** (poset ortomodulari debolmente ortocompleti). Questi rappresentano una struttura relativamente nuova, sono infatti stati introdotti da Ovchinnikov solo nel 1994; nella tesi sono stati ulteriormente studiati, confrontati con le altre strutture già note (le algebre di Boole, il reticolo dei sottospazi chiusi di uno spazio di Hilbert e la famiglia dei sottospazi separanti di uno spazio prehilbertiano sono particolari WOOMPs) e ne sono stati presentati alcuni esempi. Lavorare con WOOMPs ha permesso di dare carattere unificato ai teoremi ottenuti, che altrimenti avrebbero dovuto avere una duplice formulazione. I WOOMPs comprendono infatti due tipi diversi di strutture per le quali si prevedevano risultati di unicità.

Per facilitare l'esposizione i risultati contenuti nella tesi sono relativi a funzioni a valori reali non negativi; ma per la maggior parte, essi restano ancora validi nel caso di funzioni a valori nel cono positivo di uno spazio di Riesz, o, più generalmente, di un gruppo topologico ordinato. Descriviamo brevemente i più interessanti:

– Utilizzando il concetto di sottoinsieme **filtrante** di una struttura, si è ottenuta una caratterizzazione della debole ortocompletezza dei posets ortomodulari. Da questa segue una proprietà dei WOOMPs che permette di studiare le funzioni additive su essi definite limitandosi ad analizzarne le restrizioni su opportune sottostrutture. Relativamente alla decomposizione di Hewitt-Yosida, questo ha come conseguenza, ad esempio, il fatto che per verificare la completa additività (additività rispetto a famiglie di elementi di cardinalità qualunque) o la pura finita additività di una funzione additiva definita sul reticolo dei sottospazi chiusi di uno spazio di Hilbert è sufficiente limitarsi a studiarne la restrizione al reticolo dei sottospazi di dimensione finita o cofinita.

– Introducendo il concetto di **ereditarietà** di una struttura rispetto ad un famiglia di F funzioni additive su essa definita, si è verificata la sufficienza di tale condizione per l'unicità della F-decomposizione. Si è inoltre dimostrato che le algebre Booleane sono sempre ereditarie, dunque che l'unicità nel caso Booleano è una condizione standard e non va quindi verificata caso per caso.

– Nell'ipotesi di esistenza di F-decomposizione, ipotesi verificata nei casi notevoli di decomposizione tipo Lebesgue e tipo Hewitt-Yosida, si è dimostrato che l'ereditarietà è una condizione equivalente all'unicità; essa è inoltre anche equivalente alla uguaglianza di due famiglie di funzioni definite a partire dalla famiglia fissata F, una mediante criteri geometrici, l'altra usando il concetto di funzioni filtranti.

– L'ereditarietà di un WOOMP rispetto ad una certa famiglia di funzioni permette, in certe condizioni, di ottenere la completa additività di una funzione nella sola ipotesi di numerabile additività.

La parte finale della tesi è dedicata allo studio degli **spazi di Keller** (introdotti in [2]). Si tratta di particolari spazi vettoriali (costruiti su opportuni corpi dotati di valutazione) su cui è definita una forma bilineare simmetrica che dà origine ad una topologia. L'interesse di questi spazi sta nel fatto che, pur godendo di tutte le proprietà di cui gode il reticolo dei sottospazi chiusi di uno spazio di Hilbert, non sono di questo tipo, contrariamente a quanto gli esperti del settore hanno ritenuto per anni. Si è scelto di dare una descrizione degli spazi di Keller per conoscere questo esempio alternativo di reticolo ortomodulare, ma soprattutto per studiare in questo ambito l'unicità di un teorema di decomposizione. Nella tesi si è infatti osservato che gli spazi di Keller sono WOOMPs, dunque si è potuta studiare la decomposizione degli stati su essi definiti alla luce dei risultati ottenuti in generale e ricavare, ad esempio, l'unicità della decomposizione tipo Hewitt-Yosida in maniera diversa rispetto alla dimostrazione utilizzata da Keller.

BIBLIOGRAFIA

[1] P. DE LUCIA and P. MORALES, *Noncommutative decomposition theorems in Riesz spaces*, Proceedings of A.M.S., Vol. 120, **1** (1994), 193-201.
[2] H.A. KELLER, *Measures on infinite-dimensional orthomodular spaces*, Foundations of Phisics, **20** (1990), 575-604.
[3] M. NAVARA and G.T. RÜTTIMANN, *A characterization of σ-state spaces of orthomodular lattices*, Expositiones Math., **9** (1991), 275-284.
[4] G.T. RÜTTIMANN, *Weakly purely finitely additive maesures*, Can. J. Math., **4** Vol. 46 (1994), 872-885.
[5] J. VON NEUMANN, *Mathematical foundation of quantum mechanics*, Princeton Univ. Press, Princeton (1955).

Dipartimento di Matematica e applicazioni, Università di Napoli
email: annades@matna3.dma.unina.it annades@matna2.dma.unina.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Napoli) - Ciclo IX
Direttore di ricerca: Prof. Paolo de Lucia, Universitá di Napoli