# Bollettino Unione Matematica Italiana

*Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura*



Tiziana Durante


## Omogeneizzazione e fenomeno di Lavrentieff per funzionali ad andamento non standard


*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8*, Vol. **2-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1999), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 99–102.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_1S_99_0>



L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI*

http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

**La matematica nella Società e nella Cultura**
Bollettino U. M. I.
(8) 2-A Suppl. (1999), pag. 99-102

# Omogeneizzazione e fenomeno di Lavrentieff per funzionali ad andamento non standard.

TIZIANA DURANTE

La modellizzazione matematica di problemi relativi a materiali compositi avviene spesso mediante equazioni o funzionali aventi coefficienti o integrandi periodici, con periodo molto piccolo.

Una buona approssimazione del comportamento macroscopico di tali materiali si può allora ottenere facendo tendere a zero il parametro $\varepsilon$ che descrive la finezza della loro struttura. Tale processo prende il nome di «Omogeneizzazione».

Si considera dunque una successione di equazioni, o di funzionali al tendere di $\varepsilon$ a zero, e si vuole che, rispetto ad una opportuna nozione di convergenza, tale successione individui un'equazione, o un funzionale, limite che sia quello che descriva le proprietà macroscopiche.

D'altro canto, di recente, è stata nuovamente richiamata l'attenzione sulla rilevanza nello studio di un problema fisico schematizzabile attraverso la minimizzazione di un funzionale del Calcolo delle Variazioni, della scelta della classe di funzioni su cui effettuare la minimizzazione riprendendo classici esempi di funzionali dotati di minimi differenti su classi di funzioni, tutte naturalmente suscettibili di ben descrivere il problema in esame.

Nella tesi sono stati analizzati sia alcuni aspetti del fenomeno di Lavrentieff sia qualche aspetto dell'omogeneizzazione (in particolare quelli legati alla torsione elastoplastica, schematizzabili con la minimizzazione di funzionali su insiemi di funzioni con vincoli sul gradiente), sia, infine, qualche problema dove entrambi i fenomeni sono presenti.

Si analizza nel contesto del fenomeno di Lavrentieff il problema di Dirichlet del tipo:

$$m_h^p(\Omega,\beta) = \inf \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega f(hx, Du)\, dx + \int_\Omega \beta u dx : \ u \in W^{1,p}(\Omega) \ \ (u \in C^1(\Omega) \text{ se } p = 'c1') \\ \qquad\qquad u = 0 \text{ su } \partial\Omega, \ |Du(x)| \leq \varphi(hx) \text{ per q.o. } x \text{ in } \Omega \end{array} \right\}$$

dove $\Omega$ è un sottoinsieme aperto limitato di $R^n$ con frontiera Lipschitziana, $\beta$ è in $L^1(\Omega)$, $p$ è in $]n, +\infty[$ o $p = 'c1'$, e $f$, $\varphi$ sono funzioni che verificano le seguenti condizioni qualitative

$$\begin{cases} f\ :\ (x, z) \in R^n \times R^n \to f(x, z) \in [0, +\infty[\,, \\ f \text{ misurabile}, \quad Y\text{-periodica nella variabile } x, \quad \text{convessa nella } z\,, \\ f(\cdot, z) \in L^1(]0, 1[^n) \qquad \forall\ z \in R^n \\ \varphi\ :\ x \in R^n \to \varphi(x) \in [0, +\infty[\,, \\ \varphi\ \ ]0, 1[^n\text{-periodica}\,. \end{cases}$$

In questo contesto, più ampio dal punto di vista degli spazi funzionali sui quali si effettua la minimizzazione, si riesce ancora a provare la validità della formula di omogeneizzazione, sia pure con una formulazione lievemente generalizzata, si dimostra cioè che

$$\lim_{h \to +\infty} m_h^p(\Omega, \beta) = m_{\text{hom}}^p(\Omega, \beta) = \Big\{ \inf \int_\Omega f_{\text{hom}}^p(Du)\, dx + \int_\Omega \beta u dx :$$

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \ \ (u \in C^1(\Omega) \text{ se } p = \text{'c1'}),\ u = 0 \text{ su } \partial\Omega \Big\}$$

dove $f_{\text{hom}}^p$ è una funzione convessa da $R^n$ in $[0, +\infty]$ definita da

$$f_{\text{hom}}^p(z) = \inf \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_Y f(y, Du)\, dy \ :\ u \in W^{1,p}(Y) \ \ (u \in C^1(Y) \text{ se } p = \text{'c1'}), \\ \qquad u \ \ Y\text{-periodica}, \qquad |z + Du(y)| \leq \varphi(y) \text{ q.o. in } Y \end{array} \right\} \ z \in R^n$$

(si assume $\inf \emptyset = +\infty$) sotto le ulteriori condizioni di andamento sulle funzioni $f$ e $\varphi$

$$k|z|^q \leq f(x, z) \quad \text{q.o.} \quad x \text{ in } R^n\,, \quad z \text{ in } R^n, \quad k > 0,\ q > n$$

$$\varphi \in L^q(Y) \qquad q \in ]n, +\infty]$$

insieme all'ipotesi seguente

$$\exists\ \alpha \in R: \quad \int_Y f(y, \pm\sqrt{n}\, \alpha\varphi(y)\, e_j)\, dy < +\infty \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, n\},$$

dove $\{e_1, \ldots, e_n\}$ denota la base canonica di $R^n$.

È possibile verificare con alcuni esempi che la funzione $f_{\text{hom}}^p$ realmente dipende da $p$.

Si studia poi il comportamento asintotico per $\varepsilon$ che tende a zero del seguente problema di Dirichlet:

$$m_\varepsilon(\Omega, \beta) = \min \left\{ \int_\Omega f\left(\frac{x}{\varepsilon}, Du\right) dx + \int_\Omega \beta u dx : u \in W_0^{1,p}(\Omega) \right\}.$$

Sotto opportune ipotesi su $f$ e $\beta$ si dimostra che

i) Se $(\mathrm{dom}\, f_{\mathrm{hom}})^0 \neq \emptyset$,

$0 \in (\mathrm{dom}\, f_{\mathrm{hom}})^0$

$\forall\, z \in \mathrm{dom}\, f_{\mathrm{hom}}\ \exists\, W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(R^n) \cap L^\infty(\partial Y)$: $v$ $Y$-periodica e $f(\cdot, Dv(\cdot)) \in L^1(Y)$,

e se $\Omega$ è convesso, i valori $m_\varepsilon(\Omega, \beta)$ convergono, per $\varepsilon$ che tende a zero, al valore finito

$$m_{\mathrm{hom}}(\Omega, \beta) = \min\left\{\int_\Omega f_{\mathrm{hom}}(Du)\, dx + \int_\Omega \beta u dx : u \in W_0^{1,p}(\Omega)\right\},$$

ii) Se $(\mathrm{dom}\, f_{\mathrm{hom}})^0 = \emptyset$ e se

$$f_{\mathrm{hom}}(0) = \inf\left\{\int_Y f(y, Dv)\, dy : v \in W_0^{1,p}(Y)\right\}$$

allora $f_{\mathrm{hom}}(0) < +\infty$ e i valori $\{m_\varepsilon(\Omega, \beta)\}_{\varepsilon > 0}$ convergono, per $\varepsilon$ che tende a zero, a $|\Omega| f_{\mathrm{hom}}(0)$.

Infine, si ottiene un risultato di rappresentazione esplicita per il rilassato nella topologia $L^1(B)$ del seguente funzionale integrale

$$G(u, B) = \begin{cases} \displaystyle\int_B f(x, Du)\, dx & u \in Lip(B) \\ +\infty & u \in L^1(B) \setminus Lip(B) \end{cases}$$

dove $B$ è la sfera unitaria di $R^2$ e

$$f(x, z) = \frac{|x_2|}{|x|^3} \cdot |(z, x)| + |z|^p.$$

Si osservi che

$$|z|^p \leq f(x, z) \leq a(x) + |z|^q \qquad q > 2, \ \ a \in L^1_{loc}(R^2).$$

Il funzionale $G$ presenta sulla funzione

$$u^*(x_1, x_2) = \frac{|x_2|}{|x|}$$

un fenomeno di Lavrentieff.

In questo contesto, posto

$$F(u, B) = \begin{cases} \displaystyle\int_B f(x, Du)\, dx & u \in W^{1,p}(B) \\ +\infty & u \in L^1(B) \setminus W^{1,p}(B) \end{cases}$$

si prova che, se $F(u) < +\infty$, la funzione

$$w(\varrho, \theta) = u(\varrho \cos\theta, \varrho \sin\theta) \qquad \varrho \in (0, 1), \ \theta \in R$$

ha traccia $w^+(\theta)$ per $\varrho = 0$ e risulta

$$\overline{G}(u) = \begin{cases} F(u) + \min\limits_{c \in R} \int\limits_0^{2\pi} |\sin\theta| \, |w^+(\theta) - c| \, d\theta & u \in W^{1,p}(B) \\ +\infty \qquad u \in L^1(B) - W^{1,p}(B) \end{cases}$$

dove la presenza del termine aggiuntivo è dovuta essenzialmente alla condizione di crescita non standard per la funzione $f$.

## BIBLIOGRAFIA


[1] CARBONE L. and SALERNO S., *On a problem of homogeneization with quickly oscillating constraints on the gradient*, J. Math. Anal. Appl., **90** (1982), 219-250.

[2] CIORANESCU D. and MURAT F., *Un terme étrange venu d'ailleurs*, Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications, Collège de France Seminar, **II** (1982), 98-138.

[3] CONCA C. and DONATO P., *Non Homogeneous Neumann's problems in domains with small holes*, RAIRO Modèl Math. Anal. Numr., **22** (1988), 561-607.

[4] CORBO ESPOSITO A. and DE ARCANGELIS R., *The Lavrentieff Phenomenon and Different Process of Homogenization*, Comm. Part. Diff. Eq., **17** (1992), 1503-1538.

[5] DAL MASO G., *An Introduction to Γ-Convergence*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Birkhäuser Boston, 8 (1993).



Dipartimento di Automazione, Elettromagnetismo, Ingegneria Informatica
e Matematica Industriale - Università degli Studi di Cassino (FR)
e-mail: durante@ing.unicas.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Napoli «Federico II») - Ciclo VIII
Direttore di ricerca: Prof. Luciano Carbone
(Dip. di Matematica e Appl. «R. Caccioppoli», Univ. di Napoli «Federico II»)