# Bollettino Unione Matematica Italiana

*Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura*



Dorella Bellè


## Il problema della decisione per teorie estensionali dell'appartenenza


*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8*, Vol. **2-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1999), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 9–12.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_1S_9_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

**La matematica nella Società e nella Cultura**
Bollettino U. M. I.
(8) 2-A Suppl. (1999), pag. 9-12

# Il problema della decisione per teorie estensionali dell'appartenenza.

DORELLA BELLÈ

Questa tesi riguarda una versione insiemistica del ben noto Problema della Decisione per la Logica al Prim'ordine. Si tratta di decidere la soddisfacibilità di classi di enunciati definiti sintatticamente rispetto a teorie che indichiamo col termine di Teorie dell'Appartenenza. Le Teorie dell'Appartenenza sono teorie nel linguaggio del prim'ordine con $=, \in$ che possono assumere anche solo alcuni degli assiomi che concorrono alla formalizzazione del concetto di insieme. Parallelamente ho studiato il problema di decidere la validità delle stesse classi nell'universo standard degli insiemi, problema distinto anche se strettamente correlato al precedente. L'analisi riguarda in particolare una determinata classe di enunciati, la classe di Bernays-Schönfinkel, individuata dal prefisso quantificazionale $\exists \ldots \exists \forall \ldots \forall$, e alcune sue restrizioni. Infatti questa è la classe per cui il problema della decisione risulta più interessante in quanto per classi di complessità quantificazionale appena maggiore ovvero classi in cui compare alternanza di quantificatori, si sono ottenuti risultati di indecidibilità. A tale classe appartengono formule che riescono ad esprimere l'esistenza di insiemi infiniti in presenza degli usuali assiomi di Zermelo-Fraenkel tranne ovviamente l'assioma dell'infinito.

Il presente lavoro si inserisce in una linea di ricerca i cui primi risultati sono confluiti in [2]. In questi primi lavori è stato preso in considerazione il problema della validità, ovvero il problema di determinare per ogni data formula in una classe l'esistenza o meno di insiemi che la soddisfano. L'obiettivo era di riuscire ad ottenere degli algoritmi, da inserire in un dimostratore automatico, per stabilire se particolari tipi di formule, generalmente aperte ma coinvolgenti altri simboli relazionali e funzionali oltre ad $\in$, fossero soddisfacibili con insiemi. Si è appurato che in assenza di simboli diversi da $=, \in$ sono decidibili formule in cui è presente un numero arbitrario di quantificatori universali ristretti e in cui non compaiano annidamenti nelle variabili quantificate come si verifica ad esempio in $\forall x \in y \, \forall z \in x$. In questo caso se la formula è soddisfacibile esistono insiemi di cardinalità limitata che la soddisfano. Contrariamente alla prima impressione che faceva suppore una facile eliminazione del vincolo sull'annidamento, il problema è risultato essere di una certa complessità combinatoria. La scoperta dell'esistenza di formule aventi solo quantificatori universali ristretti e non soddisfacibili con insiemi finiti e una certa anologia con la classe di Gödel nella logica al prim'ordine con identità in cui l'indecidibilità segue dalla scoperta di formule soddisfacibili ma non finitamente soddisfacibili, ha successivamente suggerito l'idea che tale classe potesse essere indecidibile. L'obiettivo di determinare risultati che limitassero la possibilità di ottenere procedure di decisione portò alla formulazione delle prime Teorie dell'Appartenenza come collezioni di assiomi compatibili con ogni ragionevole teoria insiemistica ottenendo in questo modo risultati negativi applicabili a diverse teorie degli insiemi.

Il nucleo delle Teorie dell'Appartenenza è costituito dall'assioma che predica l'esistenza dell'insieme vuoto «Nullset Axiom» (N) $\forall x(x \notin \emptyset)$ e dall'assioma che definisce l'operazione di aggiunta di un elemento ad un insieme «With axiom» (W) $\forall x \forall y \forall z(x \in \mathbf{w}(y, z) \leftrightarrow x \in y \vee x = z)$. Dal punto di vista fondazionale gli assiomi N e W formano un frammento di teoria degli insiemi abbastanza forte da interpretare l'Aritmetica di Robinson Q. Aggiungendo l'assioma L(ess) per l'operazione di rimozione di un elemento da un insieme si ottiene la teoria dei costruttori elementari NWL. Oltre a teorie in cui la relazione di uguaglianza non è vincolata da alcun assioma come NWL che risulta consistente con l'esistenza di elementi distinti aventi gli stessi $\in$-predecessori, vengono considerate teorie in cui la relazione di uguaglianza è vincolata dall'Assioma di Estensionalità (E) $\forall x \forall y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$ o ancora più strettamente da assiomi che acquistano significato in presenza di insiemi non ben fondati come l'Assioma di Estensionalità forte (SE). Si considerano inoltre assiomi sulla buona fondatezza della relazione di appartenenza come gli assiomi di Regolarità e Antiregolarità.

In seguito le Teorie dell'Appartenenza sono state studiate con l'obiettivo di ottenere risultati di decidibilità, un problema che è risultato avere anche un certo interesse dal punto di vista computazionale soprattutto in connessione con alcuni sviluppi della programmazione logica intesi ad ottennere estensioni «con insiemi». I primi lavori sulla soddisfacibilità risalgono a [3] in cui si prova la decidibilità della classe con un solo quantificatore universale. Tale risultato è stato poi facilmente esteso alla classe con quantificatori universali ristretti non annidati. Di nuovo si è così presentato il problema di eliminare la restrizione sull'annidamento delle variabili quantificate universalmente o addirittura di considerare quantificatori universali non ristretti sapendo che classi appena più ampie risultano essere indecidibili.

Quest'ultimo è il problema che ho affrontato nel lavoro di tesi in cui ho individuato i problemi combinatori sottesi al problema della decisione per la classe di Bernays-Schönfinkel, che sono essenzialmente due: la decidibilità nella teoria dei costruttori elementari NWL senza estensionalità e la decidibilità in strutture estensionali cioè rispetto alla teoria con il solo Assioma di Estensionalità.

Il primo è stato risolto nella sua generalità mentre il secondo è risultato essere molto più complesso ed è stato risolto solo nel caso in cui il numero di quantificatori universali sia limitato a due. Passo ad illustrare il secondo rimandando per il primo a [1].

Per introdurre la problematica presento una delle formulazioni dell'assioma dell'infinito [4] già citato Sia $\phi$ la formula

$$a \notin = b \wedge a \notin b \wedge b \notin a \wedge$$

$$(\forall x \in a)(\forall u \in x)(u \in b) \wedge (\forall x \in b)(\forall u \in x)(u \in a) \wedge$$

$$(\forall x \in a)(\forall y \in b)(x \in y \vee y \in x).$$

Tale formula non è soddisfacibile interpretando $a$ e $b$ in insiemi finiti. Equivalentemente non è possibile costruire una struttura che soddisfi la formula che sia estensionale, in cui cioè elementi distinti hanno insiemi di predecessori distinti e ben fondata, per quanto riguarda la relazione binaria $\in$, e in cui

$a$ e $b$ vengano interpretati in elementi con un numero finito di predecessori.

Il problema combinatorio sottostante è il seguente: si parta da due elementi $a$ e $b$ entrambi privi di predecessori. Se richiediamo che $a$ non sia predecessore di $b$ e viceversa, per rendere distinti gli insiemi di predecessori di $a$ e $b$ siamo costretti ad aggiungere un terzo elemento $c$ predecessore di $a$ o $b$. Supponiamo di aver posto $c$ predecessore di $a$. Ora $a$ e $b$ sono distinti, ma ci sono ancora due elementi che devono essere differenziati: $b$ e $c$. Potremmo porre $c$ successore di $b$, ma potremmo essere vincolati a non usare elementi che siano successori di $b$. A questo punto sarà necessario introdurre un nuovo elemento che a sua volta dovrà essere distinto dai precedenti e così via.

In generale i vincoli sulla costruzione della struttura sono fissati dalla formula che intendiamo soddisfare. Tali vincoli stabiliscono quale siala relazione di appartenenza tra gli elementi di partenza, il tipo degli elementi che si possono introdurre durante la costruzione, dove il tipo è determinato dagli insiemi di predecessori e successori dell'elemento tra gli elementi di partenza, ed infine la relazione di appartenenza di ogni ennupla, con n fissato, di elementi aggiunti sulla base dei rispettivi tipi. Nel caso in cui $n = 2$ ciò significa che un elemento di tipo $A$ può sempre essere un predecessore di un elemento di tipo $B$ oppure che non può mai essere un predecessore di un elemento di tipo $B$ o lasciare aperte ambedue le possibilità.

La formula $\phi$ ad esempio esprime i seguenti vincoli: nessuna relazione di appartenenza tra gli elementi $a$ e $b$; possono essere introdotti solo elementi di tipo $A$, che sono elementi che rispetto ad $a$ e $b$ sono esclusivamente predecessori di $a$, oppure di tipo $B$ che sono elementi che rispetto ad $a$ e $b$ sono esclusivamente predecessori di $b$; infine nessuna relazione di appartenenza può essere presente tra coppie di elementi dello stesso tipo mentre presi un elemento di tipo $A$ ed uno di tipo $B$ si deve avere necessariamente che il primo è predecessore del secondo o viceversa.

Una coppia di insiemi che soddisfi la formula $\phi$ può essere determinata come segue. Siano $f$ e $g$ due funzioni aventi come dominio l'insieme dei naturali così definite: $f(0) = \emptyset$, $g(n) = \{f(0), \ldots, f(n)\}$, $f(n) = \{g(0), \ldots, g(n-1)\}$. È sufficiente quindi porre $a = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} \{f(i)\}$ e $b = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} \{g(i)\}$.

Nel lavoro di tesi ho dimostrato che almeno nel caso con $n = 2$ è possibile decidere per ogni data formula se esista o meno una struttura estensionale e ben fondata che la soddisfa. Questo perchè si riesce a dimostrare che una formula soddisfacibile ha un modello che consiste di una struttura di cardinalità limitata più una collezione finita di strutture infinite aventi una particolare forma ripetitiva. Tali strutture infinite che ho chiamato «curls» sono una generalizzazione della struttura sopra delineata per soddisfare $\phi$. Essi sono individuati da un insieme finito di tipi collegati da una relazione binaria a formare un ciclo. Per ogni tipo nel ciclo prendiamo successivamente un elemento formando una catena ascendente infinita.

È possibile inoltre distinguere le formule soddisfacibili aventi modelli estensionali finiti in quanto si prova che esse hanno modelli di cardinalità limitata. Poichè le strutture estensionali e ben fondate sono isomorfe a un insieme transitivo, dal precedente risultato segue la decidibilità della soddisfacibilità di formule nella classe con due quantificatori universali nell'universo di von Newmann $\mathcal{V}$ e nell'universo degli ereditariamente finiti *HF*. Il problema nel caso $n > 2$ rimane aperto.

Riassumo nel seguito i teoremi principali contenuti nella tesi.

TEOREMA 1. – *Il problema dalla soddisfacibilità per enunciati nella classe* $\exists \ldots \exists \forall \ldots \forall$ *nel linguaggio con* $\{\in, =\}$ *è decidibile rispetto alla teoria dei costruttori elementari NWL.*

Tale risultato è estendibile ad una teoria che prevede opportuni assiomi per gli operatori booleani $\cup$, $\cap$, $\setminus$.

TEOREMA 2. – *Un enunciato nella classe* $\exists \ldots \exists \forall \forall$ *che risulti valido in una struttura estensionale ha un modello di cardinalità finita e calcolabile. Il problema della soddisfacibilità per enunciati nella classe* $\exists \ldots \exists \forall \forall$ *in strutture estensionali è quindi decidibile.*

TEOREMA 3. – *Il problema della soddisfacibilità per enunciati nella classe* $\exists \ldots \exists \forall \forall$ *in strutture estensionali e ben fondate è decidibile. Il problema della soddisfacibilità per enunciati nella classe* $\exists \ldots \exists \forall \forall$ *in strutture estensionali e ben fondate finite è decidibile.*

COROLLARIO 1. – *Un enunciato nella classe* $\exists \ldots \exists (\forall \forall)_0$, dove lo 0 *indica la quantificazione ristretta, è valido in* $\mathcal{V}$ *se e solo se è soddisfacibile in una struttura estensionale e ben fondata. La validità di tale classe in* $\mathcal{V}$ *è quindi decidibile.*

Sulle basi di tale risultato si ottiene facilmente una procedura di decisione per la validità in $\mathcal{V}$ della classe senza restrizione sulla quantificazione universale $\exists \ldots \exists \forall \forall$.

## BIBLIOGRAFIA

[1] BELLÈ D. and PARLAMENTO F., *Decidability of* $\exists^* \forall^*$ *class in the Membership Theory NWL*, Gödel '96, Lecture Notes in Logic (1996), 183-194.

[2] CANTONE D., FERRO A. and OMODEO E., *Computable Set Theory. Vol. 1*, Oxford University Press, Int. Series of Monographs on Computer Science (1989).

[3] OMODEO E., PARLAMENTO F. and POLICRITI T., *Decidability of* $\exists^* \forall$*-sentences in Membership Theories*, Mathematical Logic Quarterly, 1 (1996).

[4] PARLAMENTO F. and POLICRITI A., *Expressing Infinity without Foundation*, Journal of Symbolic Logic, **56** (1991), 1230-1235.

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Udine
Dottorato di ricerca in Logica Matematica e Informatica Teorica
(sede amministrativa: Siena) - VIII ciclo
Direttore di ricerca Prof. Franco Parlamento, Università degli Studi di Udine