Bollettino Unione Matematica Italiana

Paolo Freguglia

Sul principio di omogenietà dimensionale tra Cinquecento e Seicento

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-B** (1999), n.1, p. 143–160.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2B_1_143_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

Bollettino U. M. I.
(8) 2-B (1999), 143-160

Sul principio di omogeneità dimensionale tra Cinquecento e Seicento (*).

PAOLO FREGUGLIA

Summary. – *In this paper I examine the fundamental role which had for the algebraic equations theory between the XVIth and the XVIIth century the principle of dimensional homogeneity.*

Come è ben noto l'algebra nasce ed ha i suoi primi sviluppi sostanzialmente nel Cinquecento, ed è caratterizzata dalla connessione di tecniche algoritmo-aritmetiche con questioni geometriche (costruzioni geometriche delle equazioni). La geometria con la quale ciò accadde fu proprio quella classica piana e solida delle superfici e dei volumi. Nelle opere di Cardano, Ferrari, Tartaglia, Bombelli e Stevin queste tematiche furono ampiamente sviluppate, anche se non mancarono riferimenti alla teoria delle proporzioni, in particolare alle proporzioni continue. Quest'ultima teoria fu a sua volta la chiave per la geometrizzazione effettuata da Viète. In seguito, a partire da Descartes, le costruzioni geometriche delle equazioni algebriche assunsero ulteriori significati (1). Va subito avvertito che quanto diremo di seguito, salvo avviso contrario, si riferisce, come storicamente giustificato, alle sole *radici reali positive* delle equazioni algebriche. L'obiettivo di questo nostro contributo è quello di mettere in evidenza il ruolo avuto nell'algebra dal principio in questione prima di Viète ed in Viète. Ciò dovrebbe permettere una migliore comprensione della posizione viètiana su questo argomento e di conseguenza una maggiore conoscenza di momenti cruciali della storia dell'algebra tra Cinquecento e Seicento. Inoltre riprendendo da precedenti nostri (e non solo nostri) lavori abbiamo perfezionato e chiarito alcuni rilevanti aspetti del tema in oggetto (2) presentandolo così anche a lettori matematici che non necessariamente siano cultori di storia delle matematiche.

(*) Comunicazione presentata a Padova in occasione del XV Congresso UMI.

(1) Per una esauriente analisi storica delle costruzioni geometriche delle equazioni conseguenti all'impostazione cartesiana si rimanda a Bos H. J. M. (1984).

(2) Per quanto riguarda le tematiche legate all'argomento oggetto di questo lavoro si rimanda a Freguglia P. (1994), (1992), (1991), (1989), (1988) e a Giusti E. (1992), (1987).

1. – La teoria geometrico sintetica delle equazioni algebriche nel Cinquecento.

Innanzi tutto il problema storiografico che dobbiamo porci è quello di rispondere alla domanda se si riscontra o meno nelle trattazioni relative alle equazioni algebriche di quegli algebristi del Cinquecento, le cui opere sono temporalmente collocate prima di quelle di Viète, una consapevole base «speculativa» tale da ritenere che tutto sommato risulterebbe fondato parlare a proposito di teoria, ed in particolare parlare di teoria geometrico sintetica. Per teoria in questo caso dovremmo intendere l'esistenza di una strategia dell'«ordo» espositivo, cioè di una sorta di paradigma trattatistico fondato su taluni convincimenti filosofici o ideologici che guidano verso teoremi cruciali che a loro volta permettono di giustificare risultati ottenuti per altra via, talora intellettualmente meno appagante. Secondo la mentalità del tempo che risentiva dell'insegnamento medioevale e aristotelico, per dare dignità scientifica ad un tema trattato si doveva prevalentemente ridurlo in «sintesi», cioè basarlo su *demonstrationes propter quid*, su deduzioni corrette (utilizzando addirittura se possibile *demonstrationes potissimae*, cioè sillogismi «perfetti»), ovvero su teoremi. Naturalmente ciò non vuol affatto dire che l'esposizione di una teoria si realizzi solo per teoremi (ossia con il metodo della *compositio*). Come è noto, tradizionalmente una teoria di per sè è una struttura epistemologica più articolata e più complessa che stabilisce una connessione tra il metodo dell'analisi (o *resolutio*) con quello della sintesi (o *compositio*). Semplificando, tra problemi e teoremi. Oltre questo aspetto metodologico, una trattazione teorica per essere tale deve avere un filo conduttore, come dire, uno schema sistematico ottemperando al quale vengono presentati i vari risultati. Abbiamo messo in luce in altra occasione ([3]) che in Viète queste tematiche vengono affrontate con convinzioni metodologiche più ampie e con strumenti matematici diversi da quelli degli algebristi a lui antecedenti. D'altro canto questi, anche sull'onda della tradizione araba, nelle loro trattazioni misero di fatto in correlazione i due metodi fondamentali ed utilizzarono uno schema espositorio peculiare e caratterizzante. Tutto sommato dunque si potrà rispondere positivamente all'esistenza nelle opere di questi matematici di una teoria come poc'anzi s'intendeva. In quel che segue ci proponiamo di far vedere in cosa essenzialmente consisteva la teoria geometrico sintetica delle equazioni algebriche (dove in questo caso l'attributo «sintetica» si riferisce al tipo di geometria utilizzata, che è quella della tradizione euclidea). Va detto che, preliminarmente agli aspetti geometrici, vengono presentate dagli algebristi in questione le tecniche risolutive delle equazioni. Per comodità di lettura richiameremo allora come vennero risolte, in termini di calcolo numerico (*logistica numerosa*), le

([3]) Vedi diffusamente Freguglia P. (1988).

equazioni di terzo grado. Sempre per comodità noi esporremo utilizzando il calcolo letterale. Non va comunque dimenticato che prima di Viète il linguaggio algebrico era solo retorico-numerico o sincopato-numerico.

La procedura per la soluzione delle equazioni algebriche è sostanzialmente il risultato di un aspetto del metodo dell'analisi. Come si sa, per le equazioni generali di terzo grado la soluzione fu trovata da Scipione Dal Ferro nel 1505 (o 1515) dopo una serie di vicende che si riferiscono in modo tutt'altro che secondario anche alla tradizione abacistica italiana. Predetta soluzione fu poi teoricamente presentata nel 1545 nell'*Ars magna* del Cardano. La soluzione delle equazioni generali di terzo grado riveste una funzione determinante anche per la procedura risolutiva di quelle di quarto grado, dovuta all'allievo di Cardano, Ludovico Ferrari (ci riferiamo alla cosiddetta «risolvente di Ferrari» che è appunto una equazione di terzo grado).

Lo schema risolutivo delle equazioni di terzo grado dato da Tartaglia nel nono libro dei suoi *Quesiti et inventioni diverse* pubblicati nel 1546 (4) viene proposto tramite i famosi versi «Quando che 'l cubo con le cose appresso [...]». Tartaglia afferma che la soluzione dell'equazione (alla quale si può ridurre con opportune trasformazioni l'equazione generale e completa di terzo grado):

$$x^3 + px = q \tag{1.1}$$

si ottiene cercando dapprima due numeri u e v tali che soddisfino il sistema:

$$uv = p^3/27 , \qquad u - v = q , \tag{1.2}$$

e quindi la soluzione sarà data dalla

$$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v} . \tag{1.3}$$

Dalla (1.3) con le opportune sostituzioni si ritrova la formula proposta per la prima volta sotto forma di precetto da Dal Ferro.

Nel sistema (1.2) se poniamo $\sqrt[3]{u} = a$ e $\sqrt[3]{v} = b$ otteniamo il sistema:

$$a^3 - b^3 = q , \qquad a \cdot b = p/3 \tag{1.4}$$

e quindi la (1.3) diventa:

$$x = a - b . \tag{1.5}$$

La teoria geometrico sintetica delle equazioni algebriche consiste innanzi tutto nella presentazione, da parte degli algebristi sopra rammentati, di quelle costruzioni geometriche mediante le quali, come vedremo, vengono «dimostrate geometricamente» le uguaglianze che stabiliscono le varie equazioni algebriche. Di seguito terremo principalmente presente *L'Algebra* di Rafael Bombelli

(4) Si rimanda alla più recente edizione in facsimile Tartaglia N. (1959).

che fu pubblicata (i primi tre libri) nel 1572. Tralasceremo di esaminare, per brevità, le equazioni di primo grado, trattate da Bombelli nel paragrafo *Dimostratione del Capitolo di Tanti eguali a numero* (5). Cominciamo dunque con le equazioni di secondo grado, tenendo presente quanto Bombelli dice nei paragrafi *Dimostratione del Capitolo di Potenze e Tanti eguale a numero* e *Dimostratione dell'agguagliare censo et cose a numero* (6). L'equazione presa in considerazione è:

$$(1.6) \qquad 1^{\underset{\smile}{2}}\,p.\,6^{\underset{\smile}{1}} \text{ egualia } 16, \quad \text{cioè: } x^2+6x=16, \quad \text{in generale: } x^2+bx=c\,.$$

La sottostante fig. 1 permette la costruzione geometrica richiesta non appena interpretiamo il primo membro della (1.6) con il rettangolo $AKMD$, ponendo i rettangoli $AKLC$ e $CLHB$ rispettivamente ambedue uguali a $3x$, ossia $bx/2$ (essendo $KL = LH = 3$ e $KA = LC = HB = MD = x$) ed il quadrato $BHMD$ uguale a x^2. Considereremo anche il quadrato $VZYW$, uguale al quadrato $CEFD$, ponendo il lato $VZ = t$. Se ora applichiamo la Prop. II, 6 degli *Elementi euclidei*, la quale afferma che il rettangolo $AKMD$ più il quadrato $LEGH$ è uguale al quadrato $CEFD$, otteniamo che il primo membro della (1.6), che ora viene interpretato dallo gnomone $DCLHGF$, più 9, che è il quadrato di 3, dà il quadrato $CEFD$. Si costruisce quindi sul lato EF un triangolo rettangolo tale che il quadrato del cateto EQ sia uguale al quadrato $LEGH$. Avremo allora per il teorema di Pitagora che il quadrato del cateto FQ più quello del cateto EQ ri-

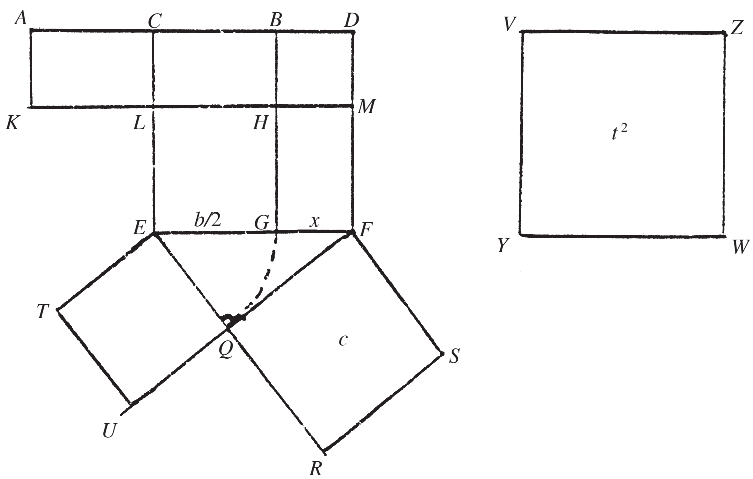

Fig. 1.

(5) Vedi pp. 184-187 di Bombelli R. (1966).
(6) Vedi pp. 193-197 e pp. 497, 498 di Bombelli R. *op. cit.*

sulta uguale al quadrato $CEFD$ e quindi in conclusione che

(1.7) (*Teor.*): Gnomone($DCLHGF$) = Quadrato($FQRS$)

e anche:

(1.8) (*Teor.*): Gnomone($DCLHGF$) + Quadrato($LEGH$) =

= Quadrato($FQRS$) + Quadrato($ETUQ$).

Puntualizziamo ora l'interpretazione di cui si diceva poc'anzi. Partiamo dalla (1.8), scriviamo nella riga successiva l'espressione algebrica di cui la (1.8) è una interpretazione.

Gnomone($DCLHGF$)	+	Quadrato($LEGH$)	=	Quadrato($FQRS$)	+	Quadrato($ETUQ$)
$x^2 + bx$	+	$b^2/4$	=	c	+	$b^2/4$
$x^2 + bx$			=	c		

In modo più esplicito, quanto sopra permette la seguente simmetria aritmetico-geometrica relativamente alle procedure risolutive che concernono rispettivamente i seguenti due problemi (uno aritmetico, l'altro geometrico) e cioè:

(1.8.1) (*Probl.*): Data l'espressione (equazione) (1.6), trovare una relazione aritmetica che permetta di esprimere la x mediante b e c.

(1.8.2) (*Probl.*): Data la figura (geometrica) fig. 1, trovare una relazione geometrica che colleghi il lato del quadrato (HD), cioè $BD = GF$, con il lato del quadrato ($LEGH$), cioè $LH = HG = GE$ (che è anche la base del rettangolo (LB)), e il quadrato ($FQRS$).

Procedura aritmetica	Procedura geometrica
(soluzione del probl. 1.8.1)	(soluzione del probl. 1.8.2)
1) $x^2 + bx = c$	1′) Rettangolo ($AKMD$) = Quadrato($FQRS$) ovvero: Gnomone($DCLHGF$) = Quadrato($FQRS$)
aggiungo nella 1) a destra e a sinistra $b^2/4$ in base a regola d'abaco	applico la *nozione com.1ma* degli *Elementi* euclidei alla 1′), tenendo presente che, per costruzione, Quadrato($LEGH$) = Quadrato($ETUQ$)
2) $x^2 + bx + b^2/4 = c + b^2/4$	2′) Gnomone($DCLHGF$) + Quadrato($LEGH$) = Quadrato($FQRS$) + Quadrato($ETUQ$) = Quadrato($CEFD$)

3) Posto: $(x + b/2)^2 = t^2$ dove $t^2 = (b/2)^2 + c$.	3′) Posto: Quadrato($CEFD$) = Quadrato($VZYW$) dove Quadr.($VZYW$) = Quadr.($LEGH$) + Quadr.($FQRS$)
4) Togliendo i quadrati nella 3: $x + b/2 = t$ da cui: $x = t - b/2$ dove $t = \sqrt{[(b/2)^2 + c]}$	4′) Passando, dalla 3′), ai rispettivi lati si ha: $EF = VZ = GF + GE$ da cui: $GF = VZ - GE$ dove VZ è il lato del quadrato che per il teorema di Pitagora è uguale alla somma dei quadrati ($LEGH$) e ($FQRS$).

Dunque il quadrato $FQRS$ rappresenta, nell'interpretazione, il secondo membro della (1.6), per cui il teorema (1.7) dimostra la validità geometrica dell'uguaglianza espressa dall'equazione (1.6) medesima. D'altro canto, tenendo presente la corrispondenza sopra riportata dei procedimenti, si può stabilire la validità geometrica del ben noto procedimento risolutivo algebrico riportato «come se fusse la dimostrazione» (7) da Bombelli nel *Capitolo di Potenze e Tanti eguali a numero* (8). Da notare che il cateto FQ e quindi il suo quadrato sono univocamente determinati nel triangolo rettangolo EQF non appena si conosca EF e EQ.

Per le equazioni di secondo grado Bombelli tiene presente anche il caso, in cui il discriminante è sempre maggiore di zero,

$$x^2 - 8x = 9 \quad \text{cioè:} \quad x^2 - px = q \tag{1.9}$$

con p e q positivi, e lo esamina nel paragrafo *Dimostrazione del sopraddetto Capitolo di potenze eguali a Tanti e numero* (9). Questo caso è esaminato con altra costruzione anche nell'*Arithmétique* del 1585 di Simon Stevin (10). Le conclusioni sono del tutto analoghe a quelle del caso $x^2 + bx = c$ poc'anzi visto.

Per le equazioni di primo e di secondo grado Bombelli fornisce anche la dimostrazione cosiddetta «in linea», dove si utilizzano proprietà inerenti solo segmenti rettilinei (11). Si può intanto osservare anche che, a proposito della

(7) Vedi p. 190 di Bombelli R. *op. cit.*

(8) Bombelli dà anche una dimostrazione del tutto algebrico sincopata che giustifica in modo aritmetico la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado. Ma è «come se fusse» la dimostrazione. Non è dunque la dimostrazione vera e propria che per Bombelli può essere solo geometrica.

(9) Vedi pp. 198, 199 di Bombelli R. *op. cit.*

(10) Vedi p. 66 di Stevin S. (1634) e Freguglia P. (1992).

(11) Con particolare riferimento al caso (1.9) vedi pp. 199, 200 di Bombelli R. *op. cit.*

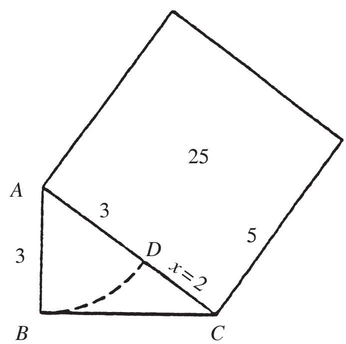

Fig. 2.

(1.6) e della costruzione geometrica ad essa connessa, è possibile individuare una costruzione grafico-geometrica per determinare la soluzione della (1.6) medesima. Infatti tenendo presente la (1.6) e la fig. 2, si può procedere con i seguenti passi geometrico costruttivi:

1) si prenda il quadrato la cui area valga $25 = c$;

2) il suo lato AC sia l'ipotenusa di un triangolo rettangolo ABC;

3) tracciamo, utilizzando squadre, i cateti del triangolo ABC, sapendo che $AB = 3 = b/2$;

4) con un compasso facciamo centro in A e raggio $AB = 3$. Determineremo allora sull'ipotenusa AC un punto D;

5) allora $DC = x = 5 - 3 = 2$.

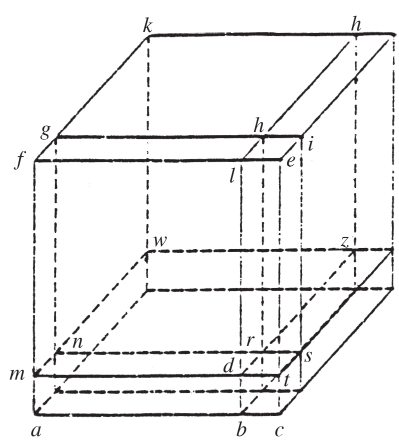

Fig. 3.

Per le equazioni di terzo grado ci rifacciamo al Cap. XI, dal titolo *De cubo & rebus aequalibus Numero*, dell'*Ars Magna* di Cardano, dove fra l'altro l'autore si riferisce a Scipione Dal Ferro e a Nicolò Tartaglia. L'equazione presa in considerazione è:

$$x^3 + 6x = 20 \tag{1.10}$$

che è del tipo (1.1). Per l'interpretazione geometrica del primo membro della (1.10) si assume, nella sottostante fig. 3, che x sia uguale ad ab, per cui x^3 risulta essere interpretato dal cubo *nrghkuwz*, e $6x = 3 \cdot 2\ ab$ che indica tre volte il parallelepipedo *mtsnfgei* la cui base è uguale ad $ac \cdot bc = 2$. Quest'ultimo passaggio è possibile dopo aver interpretato adeguatamente la seconda delle equazioni del sistema (1.4), utilizzato da Tartaglia come strumento basilare per giungere alla soluzione delle equazioni di terzo grado. Dunque in conclusione il primo membro della (1.10) risulta essere uguale allo «gnomonide», cioè al solido composto dal cubo *nrghkuwz* con l'aggiunta ad incastro dei tre parallelepipedi del tipo *mtsnfgei*. È quindi immediato dimostrare geometricamente il

(1.11) (*Teor.*): Il solido composto dal Cubo (*nrghkuwz*) più i tre parallelepipedi ad incastro del tipo (*mtsnfgei*) è uguale al solido che risulta dalla differenza da tutto il cubo più grande (di estremi c e k) del cubo più piccolo (*rdtsbc*).

Ma la differenza tra tutto il cubo grande di estremi c e k e il cubo più piccolo (*rdtsbc*) è proprio uguale, nell'interpretazione, al primo membro della prima delle equazioni del sistema (1.4), che a sua volta è uguale a 20 (cioè in generale a q). D'altro canto 20 (o q) è proprio il secondo membro della (1.10) (o in generale della (1.1)); dunque il teorema (1.11) garantisce geometricamente la validità dell'uguaglianza espressa dalla (1.10) o (1.1). Anche per le equazioni di terzo grado, tenendo presente la precedente costruzione solida, viene interpretata geometricamente la procedura che conduce alla formula risolutiva. Infatti:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\text{Cubo } (r, k) & + & 3 \text{ Parallelepipedo } (m, i) & = & \text{Cubo } (c, k) & - & \text{Cubo } (b, s) & & \\
ab^3 & + & 3\, ac \cdot bc \cdot ab & = & ac^3 & - & bc^3 & & \\
x^3 & + & 3\, u \cdot v \cdot x & = & u^3 & - & v^3 & = & \text{Gnomonide} \\
x^3 & + & 3(p/3)\, x & = & & q & & &
\end{array}$$

essendo appunto:

$$ac \cdot bc = u \cdot v = p/3 \,,$$

$$ac^3 - bc^3 = u^3 - v^3 = q \,,$$

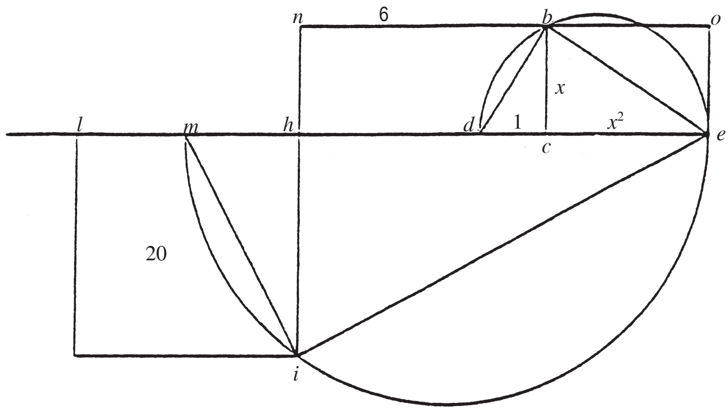

Fig. 4.

da cui

$$ab = ac - bc \rightarrow u - v = x \ .$$

Per le equazioni di terzo grado Bombelli, oltre a dare una dimostrazione tridimensionale ([12]) dà anche quella «in superficie piana» ([13]). Questa consiste nel considerare la fig. 4 (concretamente si possono utilizzare due squadre) laddove si considera il caso $x^3 + 6x = 20$. Nella figura si ha che $hm = bc = oe$ e che gli angoli in b ed in i sono retti. Applicando il cosiddetto secondo teorema di Euclide al triangolo rettangolo mie si ha che $hi^2 = mh \cdot he$. Il rettangolo $mh \cdot he$ è uguale esattamente al rettangolo $heno$ dal momento che per costruzione $hm = bc$. D'altronde il rettangolo $heno$ risulta uguale alla somma dei due rettangoli $cbeo$ e $hcbn$. Se ora interpretiamo $ce = x^2$, $bc = x$, $cd = 1$, $hc = 6$ ed il quadrato $lhi = 20$, dalla $hi^2 = mh \cdot he = (hc + ce)\, bc$ otteniamo la dimostrazione desiderata, che ha anche un risvolto in termini di proporzioni. Questo tipo di costruzione geometrica è facilmente estendibile a particolari equazioni di quinto grado e comunque di grado dispari ([14]). In modo analogo Bombelli procede per il caso $x^3 - px = q$, dimostrando con riferimento sia a costruzioni solide, sia a costruzioni in «superficie piana» ([15]).

Passiamo ora alle equazioni di quarto grado. Per queste Bombelli proporrà([16]) una «dimostrazione» adeguata alla sua impostazione, cioè giustificherà

([12]) Vedi pp. 217-219 di Bombelli R. *op. cit.*
([13]) Vedi pp. 219, 220 di Bombelli R. *op. cit.*
([14]) Vedi pp. 264, 265 di Freguglia P. (1994).
([15]) Vedi pp. 226-229 di Bombelli R. *op. cit.*
([16]) Vedi pp. 522-524 di Bombelli R. *op. cit.*

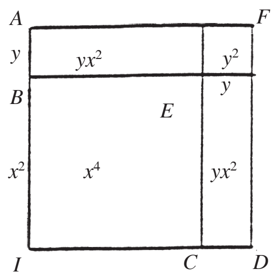

Fig. 5.

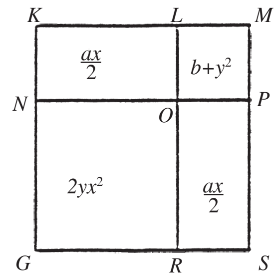

Fig. 6.

geometricamente l'uguaglianza che è alla base dell'equazione di quarto grado, ma non la procedura risolutiva. Riportiamo ora di seguito la dimostrazione in questione. Viene assegnata la seguente equazione:

$$x^4 = ax + b \tag{1.12}$$

della quale si esegue la seguente quadratura aritmetica:

$$x^4 + 2yx^2 + y^2 = ax + b + 2yx^2 + y^2 \,. \tag{1.13}$$

Si stabilisce allora di interpretare il primo membro della (1.13) mediante la sottostante fig. 5.

Imporremo poi che il secondo membro della (1.13) venga interpretato dalla fig. 6, che poniamo essere un quadrato uguale a quello della fig. 5, ma suddiviso in modo diverso. Nella fig. 6 risulta:

$$\text{Rettangolo}(OS) = OP \cdot OR \tag{1.14}$$

cioè in base alle interpretazioni poste:

$$ax/2 = \sqrt{(2yx^2)} \cdot \sqrt{(b + y^2)} \,. \tag{1.15}$$

Ma la (1.15), fatti i calcoli, è esattamente uguale alla:

$$y^3 + 2yb = a^2/4 \tag{1.16}$$

che è la risolvente di Ferrari relativa alla (1.12). Per costruzione risulta pure:

$$GS = ID$$

che secondo l'interpretazione dà appunto l'equazione:

$$x^2 + y = x\sqrt{(2y)} + \sqrt{(b + y^2)} \tag{1.18}$$

che, conosciuto y tramite la (1.16), dà le radici della (1.12).

È opportuno ribadire che questa «dimostrazione» consente solo la costruzione del modello geometrico dell'uguaglianza che è alla base dell'equazione medesima, ma non di interpretare passo per passo geometricamente la procedura risolutiva. Anche se c'è da osservare che le due equazioni cruciali per la procedura risolutiva, e cioè la (1.16) e la (1.18), sono geometricamente giustificate rispettivamente dalla (1.14) e dalla (1.17). Tuttavia, a meno che non giustifichiamo geometricamente in modo autonomo e indipendente i passi delle loro rispettive procedure risolutive, nel contesto della costruzione geometrica espressa dalle fig. 5 e fig. 6, la simmetria aritmetico-geometrica relativa al procedimento risolutivo non risulterebbe possibile.

2. – Il principio di omogeneità dimensionale ristretto.

Se ci soffermiamo sulle interpretazioni che abbiamo visto nel precedente paragrafo relativamente alle equazioni (di primo,) di secondo e di terzo grado, che si basano rispettivamente sui teoremi (1.8) e (1.11), si osserva che esse avvengono in conformità con un principio che associa ad ogni monomio dell'equazione una superficie, nel caso del secondo grado, un volume, nel caso del terzo grado. Per cui si potrà dire che questa interpretazione soddisfa il *principio di omogeneità dimensionale ristretto* (cioè fino alla dimensione tre). Più precisamente, chiameremo *interpretazione omogenea* (*ristretta*) l'interpretazione che associa a x un lato, a x^2 un quadrato, a x^3 un cubo, ad un numero una linea (segmento), o una figura piana, o una figura solida a seconda dei casi di omogeneità di cui si è detto poc'anzi. Chiameremo allora *corrispondenza* (*di procedura*) *aritmetico-geometrica* la situazione in cui una procedura algebrica, un algoritmo risolutivo, viene interpretato passo dopo passo geometricamente. Cioè quando ad ogni passaggio aritmetico-algebrico corrisponde un passaggio geometrico e, secondo quanto abbiamo visto nel precedente paragrafo, viceversa. Discende allora, tenendo presente quanto fin qui sviluppato, il seguente:

(*Teor.*): *Nel contesto in cui vale l'interpretazione omogenea ristretta solo le equazioni di primo, secondo e terzo grado sono soggette a corrispondenza aritmetico-geometrica.*

Infatti, come si è potuto osservare, per il quarto grado (in realtà, dal quarto grado in poi) nell'ambito tradizionalmente euclideo non è possibile stabilire interpretazioni omogenee.

Vorremmo ora trarre in merito qualche considerazione di carattere storiografico. La corrispondenza aritmetico-geometrica mette in luce il fatto che è del tutto equivalente, per le equazioni fino al terzo grado compreso, ragionare o in termini geometrici (di segmenti, superfici e volumi) o in termini aritmetici (abacistici). Ciò spiegherebbe il modo di procedere, di fare algebra dei matematici prima di Viète. In particolare ciò sarebbe conforme ad una possibile interpretazione del penultimo verso della «poesia» con la quale Tartaglia espone la procedura risolutiva delle equazioni di terzo grado (ai primi versi della quale si è già accennato nel precedente paragrafo), dove appunto dice [«Questi trovai (...), cioè «questa procedura risolutiva trovai»] «con fondamenti ben saldi e gagliardi», cioè — come riteniamo si debba leggere — geometricamente, perchè era la geometria (euclidea) che dava la massima garanzia matematica. Per il quarto grado non era più realizzabile questa dualità procedurale in modo soddisfacente. D'altro canto ciò conferma indirettamente l'ipotesi storiografica che alla soluzione delle equazioni di quarto grado si sia giunti, in modo decisamente più accentuato che in quelle di terzo grado, con manipolazioni prettamente algebrico aritmetiche. I motivi di questa difformità vanno ricercati, stando ai testi, nel fatto che fino al terzo grado quella che abbiamo chiamato «interpretazione omogenea ristretta» si poneva epistemologicamente come la più immediata. Tuttavia sia che si parta da predetta interpretazione, sia che si considerino le interpretazioni «in linea» o quelle «in superficie piana» (come quella che ad es. abbiamo visto per le equazioni di terzo grado), in cui in particolare si associa a x^2 un segmento e a x^3 un parallelogrammo, si utilizzano sempre e proficuamente teoremi di geometria euclidea per stabilire la validità geometrica delle uguaglianze che sono alla base delle equazioni algebriche dal primo al terzo grado compresi. In questo secondo tipo di interpretazione non si riesce però a stabilire la corrispondenza aritmetico-geometrica.

3. – La generalizzazione di François Viète.

La creazione del calcolo letterale da parte di François Viète dette un nuovo impulso alla costituzione autonoma come disciplina dell'algebra. Si passava dal calcolo numerico al calcolo letterale, ovvero dalla *logistica numerosa* alla *logistica speciosa* (da *species*). La *species*, rappresentata con lettere d'alfabeto, proveniva gnoseologicamente dagli $\varepsilon\iota\delta\eta$ platonici e dava al calcolo algebrico una potenza espressiva che lo affrancava definitivamente dalla tradizione abacistica, dalla quale peraltro proveniva. Il legame con la geometria è comunque ben saldo anche in Viète, tant'è che la sua opera costituisce l'apice di quel tacito programma scientifico che chiameremo di *geometrizzazione dell'algebra*. Il principio di omogeneità dimensionale è esplicitamente assegnato da Viète. Nel cap. III dell'*Isagoge in artem analyticem*, operetta fondamentale che il matematico e giuresconsulto di Tours scrive nel 1591, troviamo predetto principio così formulato:

> Gli omogenei (cioè le grandezze dimensionalmente omogenee) devono essere confrontati con gli omogenei.

Ciò comporta che quando si considera una equazione algebrica, essa va scritta rispettando questo principio, che come si può facilmente osservare è di natura geometrica. Ad esempio un'equazione di terzo grado va scritta conformemente a predetto principio, così:

$$A\,\text{cubus} + B\,\text{plano in } A, \quad \text{aequetur } C \text{ solido}$$

denotando A l'incognita. Oggi, prescindendo dal principio di omogeneità dimensionale e utilizzando le lettere minuscole, scriveremo la precedente equazione così:

$$x^3 + bx = c\,.$$

Mentre per le incognite, indicate in genere da Viète con A ed E, l'ordine di omogeneità dimensionale è dato dalla seguente gerarchia:

latus, quad., cubus, quad.quad., quad.cubus, cubus cubus, ecc.

per le costanti si ha corrispondentemente:

linea, plano, solido, plano plano, plano solido, solido solido, ecc.

Questa distinzione risulta opportuna dal momento che per il calcolo geometrico hanno soprattutto importanza le potenze delle incognite. Va costatato pure che la gerarchia dimensionale oltrepassa la terza dimensione. In realtà anche Bombelli parla di «numero quadroquadrato» e ancora di numeri «quadrocubico» e «cubicoquadratico», così ad esempio scrive ([17]):

> Il produtto di ogni numero cubo moltiplicato in se stesso, overo il cubato di ogni numero quadrato si chiama numero quadrocubico, o cubo quadrato (come sarebbe 64) che nasce dal quadrato di 8 numero cubo, over dal cubato di 4 numero quadrato, et il lato cubicoquadrato di 64 è 2. [...]

ma non sembra che egli pensi ad un possibile risvolto, ancorchè lessicale, di tipo geometrico, come invece ciò almeno in nuce appare leggendo Viète.

Dunque tutti gli addendi, monomi di una equazione, dovranno avere la medesima dimensione. Abbiamo visto nel precedente paragrafo, nell'ambito della logistica numerosa, l'importanza algebrico-aritmetica di questo principio. Anche se il programma di geometrizzazione dell'algebra portato avanti da Viète ha come cardine la teoria delle proporzioni che va intesa come la forma più astratta, per quel tempo e per la classicità, di teoria delle grandezze e quindi di geometria, troviamo tuttavia nella trattazione viètiana della teoria delle equazioni, aspetti che generalizzano tramite il calcolo letterale le tematiche viste nei precedenti paragrafi. Ci riferiamo in particolare a quanto trattato da Viète a proposito delle cosiddette trasformazioni «plasmatiche» delle equazioni, cioè in particolare al teorema IV del Capitolo XIII del trattato viètiano *De emen-*

([17]) Vedi p. 12 di Bombelli R. *op. cit.*

datione. Questo teorema stabilisce, come appunto abbiamo fatto vedere ([18]), una trasformazione che permette di analizzare in modo nuovo la procedura di risoluzione delle equazioni generali di quarto grado. Ma allo stesso tempo implicitamente ci suggerisce alcune considerazioni sulle costruzioni geometrico sintetiche delle equazioni. Il teorema in questione ha il seguente enunciato:

Si A quad. $+B$ in A aequetur S plano $+D$ plano: A quad.quad. $-(D$ plano $2+B$ quad.) in A quad. $+B$ in S planum 2 in A, aequabitur S plano plano $-D$ plano plano.

In altri termini (scrivendo in modo semplificato) si tratta della seguente facile trasformazione:

(3.1) $$\text{data } A^2 + BA = S + D \text{ segue } A^2 - D = S - BA$$

che facendo i quadrati dei due membri ed ordinando opportunamente ci dà:

(3.2) $$A^4 - (2D + B^2)A^2 + 2BSA = S^2 - D^2 .$$

Se consideriamo l'equazione generale di quarto grado:

(3.3) $$A^4 + pA^2 + qA = r$$

e poniamo:

(3.4) $$p = -(2D + B^2); \qquad q = 2BS; \qquad r = S^2 - D^2$$

si giunge alla giustificazione della procedura risolutiva della (3.3) di cui poc'anzi si diceva, stabilendo la seguente risolvente di Ferrari ([19]):

(3.4.1) $$B^6 + 2pB^4 + (p^2 + 4r)B^2 - q^2 = 0 .$$

Se ora invece che dalla (3.1) partiamo dalla:

(3.5) $$A^2 + BA = S^2 - D^2$$

giungiamo alla:

(3.6) $$A^4 + (2D^2 - B^2)A^2 + 2BS^2A + D^4 = S^4 .$$

Analogamente alle (3.4) porremo questa volta:

(3.7) $$p = 2D^2 - B^2; \qquad q = 2S^2B; \qquad r = S^4 - D^4$$

che condurranno alla seguente risolvente di Ferrari:

(3.7.1) $$B^6 + 2pB^4 - (p^2 + 4r)B^2 + q^2 = 0 .$$

([18]) Vedi pp. 279-281 di Freguglia P. (1994).
([19]) *Ibid.*

Consideriamo ora lo sviluppo della potenza quarta del binomio $A + D$:

$$A^4 + 4A^3D + 6A^2D^2 + 4AD^3 + D^4 = (A + D)^4 \tag{3.8}$$

confrontando (3.6) con (3.8) si ottiene che:

(*Teor.*): *Data l'equazione* (3.3), *se valgono le posizioni* (3.7) *e la*

$$4A^3D + 6A^2D^2 + 4AD^3 = 2D^2A^2 - B^2A^2 + 2S^2BA \tag{3.9}$$

allora $A = S - D$ *è soluzione della* (3.3).

D'altro canto se $A = S - D$ *è soluzione della* (3.3) *allora valgono le* (3.7) *e* $B = 2D$.

Va sottolineato il carattere geometrico della (3.9), tenedo presente il relativo significato geometrico della (3.8). Tanto la (3.8) che la (3.9) soddisfano il principio di omogeneità così come viene formulato da Viète. La (3.8), in base al linguaggio viètiano si può scrivere così:

$(A + B)$ quad.quad. aeq. A quad.quad. + $4A$ cubus in D [linea] $+ 6A$ quad. in D plano $+4A$ [latus] in D cubus $+D$ plano plano [20].

Il senso di quanto «naturalmente» ci suggerisce il precedente teorema viètiano viene confermato dal fatto che, ragionando allo stesso modo, ritroviamo quanto abbiamo visto per il terzo e per il secondo grado. Infatti vale immediatamente quanto segue.

[20] Utilizzando ora, come noi (ma non Viète) potremmo fare, la geometria sintetica quadridimensionale la (3.8) si può leggere così:

L'ipercubo il cui spigolo e uguale al segmento $(A + D)$ si scompone *in un ipercubo di spigolo il segmento A, un altro ipercubo di spigolo D, quattro prismi quadridimensionali di altezza D e base cubica di spigolo A, quattro prismi quadridimensionali di altezza A e base cubica di spigolo D, e sei prismi quadridimensionali fatti in modo tale che in ogni loro vertice concorrono due spigoli di lunghezza A e due spigoli di lunghezza D.*

Ovviamente questa lettura è del tutto estranea alle conoscenze viètiane ed alla sua mentalità. Tuttavia non si può fare a meno di osservare che, come abbiamo visto, egli concepisce gerarchie dimensionali che vanno oltre la terza dimensione.

Geometricamente a sua volta la (3.9) stabilisce l'eguaglianza tra la figura quadridimensionale M_1 composta *da quattro prismi quadridimensionali di altezza D e base cubica di spigolo A, quattro prismi quadridimensionali di altezza A e base cubica di spigolo D, e sei prismi quadridimensionali fatti in modo tale che in ogni loro vertice concorrono due spigoli di lunghezza A e due spigoli di lunghezza D,* e la figura quadridimensionale M_2 composta *togliendo a due prismi quadridimensionali ai cui vertici concorrono due spigoli di lunghezza D e due di lunghezza A, un prisma quadridimensionale ai cui vertici concorrono due spigoli di lunghezza A e due di lunghezza B, e aggiungendo due prismi quadridimensionali ai cui vertici concorrono due spigoli di lunghezza S e uno spigolo di lunghezza B ed un altro di lunghezza A.*

(*Teor.*): *Data l'equazione generale di terzo grado*:

$$A^3 + pA = q \tag{3.10}$$

se valgono:

$$p = 3SD\ ; \qquad q = S^3 - D^3 \tag{3.11}$$

e:

$$3SDA = 3D^2A + 3A^2D \tag{3.12}$$

allora $A = S - D$ *è soluzione della* (3.10).

D'altro canto se $A = S - D$ *è soluzione della* (3.10) *allora valgono le* (3.11).

Geometricamente la (3.12) stabilisce che, vedi fig. 3, *i tre parallelepipedi* (*mtsnfgei*) *di lati* $mf = A$, $fg = D$ e $fe = S$ sono uguali a *tre parallelepipedi* (*dtrsiehl*) *le cui basi sono date dai quadrati di lato D e le cui altezze misurano A*,
aggiunti rispettivamente a tre parallelepipedi (*mdrnflhg*) *le cui basi* (*quadrate*) *hanno lato A e le cui altezze misurano D*.

La qual cosa è appunto implicita nel modello geometrico relativo alla fig. 3. Si noti peraltro che le (3.11) sono esattamente le (1.4) e la $A = S - D$ è la (1.5).

Abbiamo inoltre:

(*Teor.*): *Condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione generale di secondo grado*:

$$A^2 + pA = q \tag{3.15}$$

abbia soluzione espressa da $A = S - D$ *è che sia*:

$$p = 2D\ ; \qquad q = S^2 - D^2\ . \tag{3.16}$$

La (3.16), tenendo presente la fig. 1, nel modello relativo alla (1.6) ovvero alla (3.15), stabilisce che $LH = D$; $BH = A$ e $LM = EF = DF = S$. Il quadrato $BHMD$ vale A^2, il quadrato $LEGH$ vale D^2 e il quadrato $CEFD$ vale S^2.

4. – Il superamento.

Già in Bombelli troviamo costruzioni-interpretazioni che, come abbiamo almeno in parte visto, associano ad un segmento un x^2. Non solo, ma sempre in Bombelli possiamo individuare un calcolo tra segmenti (non orientati) che troverà pieno consolidamento nella *Géométrie* di Descartes ([21]). L'introduzione di questo calcolo, che è caratterizzato da operazioni chiuse, nel senso che operando tra segmenti si ottiene comunque, come risultato, un segmento, segna in effetti il superamento ideologico del principio di

([21]) Vedi a tal proposito Freguglia P. (1989) e Giusti E. (1992).

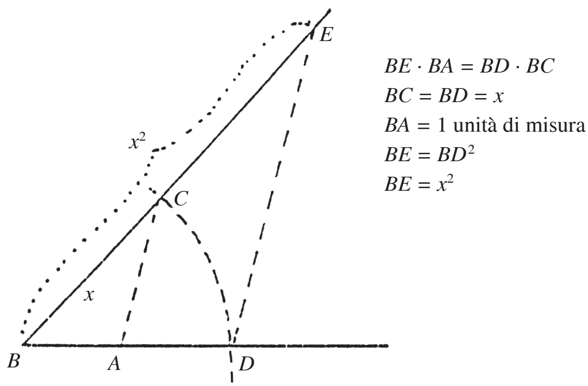

Fig. 7.

omogeneità, che tuttavia conserverà la sua validità teorica, laddove sia opportuno farvi riferimento. Come si può osservare dal sottostante esempio della fig. 7, con il calcolo tra segmenti la potenza x^2, ad esempio, viene rappresentata come illustrato. Peraltro proprio l'abbandono del condizionamento del principio di omogeneità dimensionale (ristretto) consentirà a Descartes la soluzione generale del problema di Pappo, che è uno dei temi più rilevanti della *Géométrie*. Viète nella sua generalizzazione rimane ancorato alla tradizione, pur prospettando dimensioni superiori a quelle classiche della geometria euclidea. Descartes, ma in realtà anche qualcuno prima di lui, non accetta più l'assolutezza di predetto principio.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Fonti:

BOMBELLI R. (1966), *L'Algebra* (prima ed. integrale, intr. di U. Forti e prefaz. di E. Bortolotti), Feltrinelli, Milano (prima ed. dei primi tre libri 1572).

CARDANUS G. (1663), *Artis Magnae, sive de regulis algebraicis, liber unus*, in *Opera*, 10 voll., vol. IV, Lugduni (prima ed. 1545).

DESCARTES R. (1954), *The Géométrie of R. Descartes, with a facsimile of the first edition* (traslated from the French and Latin by D. E. Smith and L. Lathan), Dover Publications Inc., New York, oppure *La Géométrie*, in *Oeuvres de Descartes*, publ. par Ch. Adam & P. Tannery, vol. VI (*Discours de la Mèthode & Essais*), Librairie philosophique J. Vrin, Paris (1965) (prima ed. 1637).

STEVIN S. (1585), *L'Arithmétique*, facsimile in *The Principal Works of Stevin*, vol. II B, Mathem., ed. by D. J. Struik, C. V. Swets & Zeitlinger, Amsterdam (1958).

TARTAGLIA N. (1554), *Quesiti et inventioni diverse*, facsimile, intr. e a cura di A. Masotti, ed. Ateneo di Brescia, Brescia, 1959 (prima ed. 1546).

VIÈTE F. (1646), *Opera mathematica* [...], Elzevir, Lugduni Batavorum.

Letteratura:

BOS H. J. M. (1984), *Arguments on motivation in the rise and decline of a mathematical theory*; *the «Construction of equations» 1637 - ca.1750*, in Arch. for History of Exact Sciences, XXX.

FREGUGLIA P. (1988), *Ars analytica. Matematica e methodus nella seconda metà del Cinquecento*, Bramante ed., Busto Arsizio.

FREGUGLIA P. (1989), *Algebra e geometria in Viète*, Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche, IX.

FREGUGLIA P. (1991), *Bombelli, Viète e Descartes: tre momenti dello sviluppo dell'algebra del Cinquecento*, Lezioni Galileiane, I, Istituto della Enciclopedia Italiana, Roma.

FREGUGLIA P. (1992), *L'*Arithmétique *di Simon Stevin e gli sviluppi dell'algebra nella seconda metà del Cinquecento*, in AA.VV., *La matematizzazione dell'universo. Atti del Convegno «Momenti della cultura matematica tra Cinquecento e Seicento»*, ed. Porziuncola, Assisi.

FREGUGLIA P. (1994), *Sur la théorie des équations algébriques entre le XVI et le XVII siècle*, Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche, XIV.

GIUSTI E. (1987), *La* Géométrie *di Descartes tra numeri e grandezze*, Giornale critico della filosofia italiana, LXVI-LXVIII.

GIUSTI E. (1992), *Algebra and Geometry in Bombelli and Viète*, Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche, XII.

RITTER F. (1895), *Françùois Viète, inventeur de l'algèbre moderne, 1540-1603. Essai sur sa vie et son oeuvre*, Revue occidentale philosophique, sociale et politique, 10.

ROSE P. L. (1975), *The Italian Renaissance of Mathematics*, Librairie Droz, Genève.

Dipartimento di Scienze, Università di Chieti - Pescara
Viale Pindaro 42 - 65127 Pescara

Pervenuta in Redazione
il 19 settembre 1997