Bollettino
Unione Matematica Italiana

L. Ambrosio, G. Dal Maso, M. Forti, M. Miranda, S. Spagnolo

Ennio De Giorgi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-B** (1999), n.1, p. 3–31.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2B_1_3_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

Cortesia Foto Frassi - Pisa

ENNIO DE GIORGI

Note biografiche

Ennio De Giorgi nacque a Lecce l' 8 febbraio 1928. La madre, Stefania Scopinich, proveniva da una famiglia di navigatori di Lussino, mentre il padre, Nicola, era insegnante di Lettere alle Magistrali di Lecce, oltre che un apprezzato cultore di Lingua Araba, Storia e Geografia. Il padre venne a mancare prematuramente nel 1930; la madre, a cui Ennio era particolarmente legato, visse fino al 1988.

Nel 1946, dopo la Maturità Classica a Lecce, Ennio si iscrisse alla Facoltà di Ingegneria di Roma, ma l'anno successivo passò a Matematica, laureandosi nel 1950 con Mauro Picone. Subito dopo divenne borsista presso l'IAC, e, nel 1951, assistente di Picone all'Istituto Castelnuovo di Roma.

Nel 1958 vinse la Cattedra di Analisi Matematica bandita dall'Università di Messina, dove prese servizio in dicembre. Nell'autunno del 1959, su proposta di Alessandro Faedo, venne chiamato alla Scuola Normale di Pisa, dove ricoprì per quasi quarant'anni la Cattedra di Analisi Matematica, Algebrica e Infinitesimale.

Nel settembre del 1996 fu ricoverato all'ospedale di Pisa. Dopo aver subito vari interventi chirurgici, si spense il 25 ottobre dello stesso anno.

Premi e riconoscimenti accademici

Nel 1960 l'UMI gli assegnò il Premio Caccioppoli, appena istituito. Nel 1973 l'Accademia dei Lincei gli conferì il Premio Presidente della Repubblica. Nel 1990 ricevette a Tel Aviv il prestigioso Premio Wolf.

Nel 1983, nel corso di una solenne cerimonia alla Sorbona, fu insignito della Laurea *ad honorem* in Matematica dell'Università di Parigi. Nel 1992 l'Università di Lecce gli conferì la Laurea in Filosofia, di cui andava particolarmente fiero.

Fu socio delle più importanti istituzioni scientifiche, in particolare dell'Accademia dei Lincei e dell'Accademia Pontificia dove svolse fino all'ultimo un ruolo attivo. Nel 1995 venne chiamato a far parte della Académie des Sciences di Parigi e della National Academy of Sciences degli Stati Uniti.

L'insegnamento e l'impegno accademico

In tutte le attività a cui si dedicava, De Giorgi mostrava un impegno ed una disponibilità che andavano ben oltre i semplici doveri accademici. Un solo limite poneva alla sua collaborazione, il fermo rifiuto ad assumere cariche amministrative o burocratiche di qualunque tipo.

Sul finire degli anni '50, insieme ad Enrico Magenes, Giovanni Prodi, Carlo Pucci ed altri, diede vita ad un'associazione di giovani ricercatori, il CONARM, che gettò le basi dei Gruppi Nazionali per la Matematica. Quasi ogni anno, fra il 1960 e il 1980, fu membro della commissione per l'ammissione alla Scuola Normale, e molti dei problemi più originali assegnati in quel periodo recano la sua impronta. In quegli stessi anni fu anche membro di numerose commissioni di Concorso a Cattedra. Verso la fine degli anni '60 svolse un intenso lavoro nel Comitato Tecnico della Facoltà di Scienze di Lecce; una decina di anni più tardi fece parte del Comitato Ordinatore della SISSA di Trieste. Nel 1964 entrò nella Commissione Scientifica dell'UMI e, in seguito, nel Direttivo dell'Alta Matematica. A partire dal 1979 offrì la sua collaborazione al CIMPA di Nizza, un Centro internazionale che promuove la didattica e la ricerca matematica nei Paesi in via di sviluppo.

A Pisa, De Giorgi teneva ogni anno due corsi, solitamente il martedì e il mercoledì dalle 11 alle 13. Il tono di queste lezioni era molto rilassato, con frequenti interventi da parte degli ascoltatori. A volte la lezione si interrompeva a metà per una ventina di minuti, e l'intera classe si trasferiva in un vicino caffè. Anche se poco curate nei dettagli, le sue lezioni riuscivano affascinanti; quelle sulla Teoria della Misura degli anni '60 sono diventate un classico. Di alcuni dei suoi corsi restano delle note redatte dagli allievi e da lui accuratamente riviste.

A partire dalla metà degli anni '70, De Giorgi riservò il corso del mercoledì ai Fondamenti della Matematica, continuando a dedicare l'altro corso al Calcolo delle Variazioni o alla Teoria Geometrica della Misura.

Nel 1967-68 volle sperimentare l'insegnamento di un corso «di servizio», le Istituzioni per i Chimici. Le note di questo corso, redatte da Mario Miranda, sono un modello di essenzialità e chiarezza; insieme al «Ghizzetti - De Giorgi» di Analisi Superiore (incompiuto), è questo uno dei pochissimi libri di Ennio.

Le attività fuori sede

Sul finire degli anni '50, De Giorgi ricevette pressanti inviti da parte di varie Università americane; in particolare nel 1960 Robert Oppenheimer lo invitò ripetutamente a visitare l'Institute for Advanced Study di Princeton. Ma, forse a causa della sua scarsa dimestichezza con la lingua inglese, egli finì col recarsi negli Stati Uniti soltanto nel 1964, quando, su invito di Wendell Fleming, passò quattro mesi fra la Brown e la Stanford University. Fu quello il suo unico viaggio in America.

Assai frequenti furono invece le sue visite a Parigi, dove a partire dagli anni '60 si recava quasi ogni anno per 3-4 settimane, invitato da Jean Leray o Jacques-Louis Lions. A Parigi Ennio si sentiva di casa. Dai soggiorni francesi nacque la sua predilezione per «Le Monde», che era solito leggere quasi ogni giorno anche in Italia.

Nel 1966 il Congresso Internazionale dei Matematici si svolgeva a Mosca, e Petrowski invitò De Giorgi a tenere una delle conferenze plenarie; ma, quando già aveva preparato il testo della sua conferenza, Ennio rinunciò ad andare. Quel testo fu letto al Congresso da Edoardo Vesentini, e rappresenta un compendio dei più recenti risultati sulla teoria delle superficie minime pluridimensionali.

Molti anni più tardi, nel 1983, De Giorgi accettò di tenere una conferenza plenaria all'ICM di Varsavia. Erano gli anni di Solidarnosc e di Jaruzelski, e il Congresso, già rinviato di un anno, si svolgeva in un clima molto pesante. Ennio iniziò la sua conferenza sulla Γ-convergenza manifestando grande ammirazione per la Polonia. In quella stessa occasione espresse pubblicamente una delle sue convinzioni più profonde, dichiarando che la sete di conoscenza dell'uomo era a suo avviso il «segno di un desiderio segreto di vedere qualche raggio della gloria di Dio».

Forse anche per tradizioni familiari, De Giorgi era molto interessato a tutto quel che riguardava i Paesi più lontani, come il Brasile e il Giappone (dove però non ebbe mai modo di recarsi). Nel 1966 accettò con entusiasmo la proposta di Giovanni Prodi di prestare il suo servizio di insegnante presso una piccola Università dell'Asmara gestita da suore italiane. Così, fino al 1973, cioè fintantoché lo consentì la situazione politica in Eritrea, egli trascorreva ogni anno un mese all'Asmara. Al suo ritorno a Pisa, parlava a lungo delle sue «imprese africane».

In Italia, Ennio contava amici ed allievi un po' dappertutto. Frequenti erano le sue trasferte per seminari o convegni, specie a Pavia, Perugia, Napoli, Trento, oltre che ovviamente a Roma e a Lecce. Fu un assiduo partecipante dei Convegni di Calcolo delle Variazioni dell'Isola d'Elba e di Villa Madruzzo, a Trento, dove si sentiva particolarmente a suo agio. In queste occasioni appariva instancabile, promuovendo interminabili discussioni scientifiche e lanciando sempre nuove idee o congetture.

A partire dal 1988, quando cominciarono a manifestarsi i primi problemi di salute, Ennio prese a trascorrere, specie durante l'estate, lunghi periodi a Lecce in compagnia della sorella Rosa, del fratello Mario, e dei loro figli e nipoti. Fu questa l'occasione, per lui che a Pisa viveva solo, alloggiato in una stanza del Collegio Timpano, di sperimentare la vita di famiglia. Ma questi soggiorni erano anche fonte di frequenti incontri di lavoro con i suoi allievi leccesi, sia sulle spiagge adriatiche e joniche del Salento, che nel Dipartimento che ora porta il suo nome.

L'impegno civile, politico, religioso

Sin dall'esordio del periodo pisano, De Giorgi volle impegnarsi in varie attività di volontariato. Per moltissimi anni prese a cuore alcune famiglie indigenti della città, che andava spesso a visitare in compagnia di suoi giovani allievi. Era molto generoso; la sua generosità era resa più accettabile dal rispetto che egli mostrava istintivamente verso tutte le persone, quale che fosse la loro estrazione sociale o culturale.

Nel 1969 si cimentò in un una scuola serale per adulti che si preparavano alla Licenza Media. Come ausilio didattico si serviva a volte della Settimana Enigmistica. Gli allievi apprezzavano il suo insegnamento, anche se lo trovavano un po' astratto.

Fra gli impegni sociali di Ennio De Giorgi, il più sentito fu indubbiamente quello per la difesa dei diritti umani. Questo impegno, che si protrasse fino agli ultimissimi giorni della sua vita, iniziò verso il 1973 con la campagna in difesa del dissidente ucraino Leonid Plioutsch, rinchiuso in un manicomio di stato a Dniepropetrovsk. Grazie agli sforzi di molti scienziati di tutto il mondo, come Lipman Bers, Laurent Schwartz e lo stesso De Giorgi, Plioutsch divenne un simbolo della lotta per la libertà di opinione, e infine, nel 1976, venne liberato. In Italia, Ennio riuscì a coinvolgere in questa battaglia centinaia di persone di idee politiche diverse. In seguito continuò la sua opera in difesa di moltissimi perseguitati politici o religiosi, divenendo membro attivo di Amnesty International, e fondatore del Gruppo pisano, cogliendo ogni occasione per illustrare e diffondere la Dichiarazione Universale dei Diritti dell'Uomo.

Pur senza impegnarsi direttamente nella politica nazionale, che vedeva troppo estranea ai grandi problemi universali, De Giorgi mostrò sempre un vivo interesse verso i principali temi che animavano la vita italiana. In particolare egli fece sentire più volte la sua voce sulla questione dell'aborto, sulla libertà di insegnamento, sui rapporti fra la scienza e la fede.

Era una persona profondamente religiosa. Ne è una dimostrazione la serenità che seppe trasmettere a chi gli fu vicino nelle dure prove degli ultimi giorni. Non teneva nascoste le sue convinzioni religiose, ma il suo atteggiamento di continua ricerca, la sua naturale curiosità, la sua apertura verso tutte le idee, anche le più lontane dalle sue, rendevano facile e costruttivo il suo dialogo con gli altri anche su questi temi.

Accanto all'Apocalisse di San Giovanni e al Libro dei Proverbi, uno dei libri che più amava erano i Pensieri di Pascal.

L'opera scientifica di Ennio De Giorgi

Dagli esercizi del corso di Analisi Funzionale alla falsificazione del Teorema di Bernstein, attraverso la risoluzione del Problema di Plateau e del XIX Problema di Hilbert

I primi lavori

Le prime pubblicazioni su riviste scientifiche di Ennio De Giorgi ([1]-[5] e [8]), apparvero negli anni 1950-53. Ciascuna di esse è frutto dello stretto rapporto allievo-maestro con Mauro Picone, relatore della sua tesi di laurea e direttore dell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, presso il quale De Giorgi ebbe il suo primo impiego.

Gli articoli [1] e [2] possono essere considerati come il risultato della attiva frequentazione di un corso universitario, tenuto da Picone nell'anno accademico 1949-50. In entrambi si legge una nota del seguente tenore «seguo la nomenclatura adottata dal professor Picone nel suo corso di Analisi Funzionale». Per quanto attiene ai contenuti, nel primo «Si mostra come ogni successione di chiusi di uno spazio compatto di Hausdorff, abbia punti limite». Questa frase è tutto quanto scrisse il recensore R. Arens per il Mathematical Review. Nel secondo si considera lo spazio delle successioni di numeri reali. Si indicano tre proprietà elementari per le metriche su tale spazio, grazie alle quali può darsi una elementare caratterizzazione della compattezza in esso. La recensione firmata da V.L. Klee, Jr. per il Mathematical Review, come tutte quelle alle quali faremo in seguito riferimento, è molto dettagliata e contiene alcuni suggerimenti semplificativi del lavoro originale.

La nota [5] è uno studio molto diligente del problema di minimo per un funzionale quadratico unidimensionale. Trattasi di un problema presentato da Picone nel «Corso di Analisi Superiore - Calcolo delle Variazioni», pubblicato dal Circolo Matematico di Catania nel 1922. La recensione, molto sbrigativa, di J.M. Danskin sembra voler dire che la nota contiene la risoluzione, non breve, di un esercizio non difficile.

Nella nota [3] si considera un problema, verosimilmente indicato da Picone nel corso «Introduzione al Calcolo delle Variazioni», tenuto a Roma nell'anno accademico 1950-51. Trattasi del minimo di un funzionale quadratico per funzioni vettoriali reali di una variabile reale. Nel recensire il lavoro L.M. Graves non si mostra impressionato dai risultati, limitandosi a scrivere «Questo articolo contiene alcune osservazioni su problemi variazionali quadratici».

La nota [4] presenta una condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità di una funzione quasi continua, rispetto ad una massa elementare. Per l'inquadramento del problema l'autore rinvia alla monografia di M. Picone e T. Viola «Lezioni sulla teoria moderna dell'integrazione», Ediz. Scient. Einaudi, 1952. La recensione della nota apparve di seguito a quella della monografia, ed entrambe furono firmate da T.H. Hildebrandt.

Nella nota [8] si prova l'olomorfia della somma di una serie di polinomi omogenei, uniformemente convergente in un intorno reale dell'origine, sotto opportune condizioni di limitatezza degli stessi nel campo complesso. L'origine del lavoro è spiegata dallo stesso autore, che scrive «dimostro un teorema che, costituendo da gran tempo una congettura del professor Mauro Picone, spesso comunicata a noi suoi discepoli, non mi consta abbia avuto finora la semplice dimostrazione che qui espongo». La recensione è di J. Favard.

Lo sviluppo della teoria dei perimetri

Nella seconda serie di articoli ([6], [7], [10] [14] e [19]) si manifestano le eccezionali capacità e la grande sicurezza di sé del giovane De Giorgi. Doti che furono riconosciute da Renato Caccioppoli, nello storico incontro di cui diremo più avanti.

La nota [6] è il testo di una comunicazione al Congresso della Società Matematica Austriaca, tenutosi a Salisburgo dal 9 al 15 settembre 1952. In essa viene presentato un teorema alla Weierstrass, di esistenza del massimo e del minimo valore di una funzione reale definita sulla famiglia dei sottoinsiemi misurabili di un fissato insieme limitato dello spazio euclideo n-dimensionale, ed aventi perimetro equilimitato. L'autore avverte che la nozione di perimetro è equivalente alla misura $(n-1)$-dimensionale della frontiera orientata, introdotta da Caccioppoli in due note lincee contenute nei fascicoli 1 e 2 del Vol. XII (1952). Il perimetro viene calcolato analiticamente, in modo originale ed estremamente efficace, mediante il prodotto di convoluzione della funzione caratteristica dell'insieme per la funzione gaussiana. Nella stessa nota l'autore annuncia la validità della diseguaglianza isoperimetrica per ogni insieme misurabile secondo Lebesgue. La nota fu recensita da L.M. Graves, che non vi colse le novità interessanti il Calcolo delle variazioni.

Queste novità furono sottolineate dallo stesso De Giorgi nella nota [7], presentata ai Lincei il 14 marzo 1953. In essa l'autore richiama l'attenzione sulla stretta connessione fra i suoi risultati e i risultati annunciati come validi o presunti tali da Caccioppoli. La nota fu recensita da L.C. Young, il quale non vide tale connessione, nonostante che egli avesse espresso un parere molto negativo sulle note di Caccioppoli, da lui stesso recensite prima della nota di De Giorgi.

Non è questa l'unica stranezza attorno al parallelismo Caccioppoli - De Giorgi, un maestro riconosciuto e un giovane ai primi cimenti impegnativi. De Giorgi lavorò alla sua teoria dei perimetri, percorrendo con sicurezza il cammino intravisto da Caccioppoli, senza aver mai parlato con lui. Si avvaleva delle note lincee di Caccioppoli, che, molto probabilmente, Picone aveva portate alla sua attenzione. Nell'anno accademico 1953-54, in occasione di una conferenza che Caccioppoli tenne a Roma, questi incontrò De Giorgi, che lo mise a conoscenza del proprio lavoro sulle frontiere orientate. Questo incontro è stato ricordato da Edoardo Vesentini durante la cerimonia funebre per De Giorgi, il 27 ottobre 1996 a Pisa: «Prima di toccare l'aspetto matematico dell'osservazione di De Giorgi, Caccioppoli citò una frase di André Gide: non c'è nulla di più barbaro di uno spirito puro; poi, rivolto ad Ennio, aggiunse: mi sembra che lei sia un'eccezione».

La conferma del riconoscimento del valore di De Giorgi venne con la recensione di L.C. Young della nota [10], nella quale si dimostrava in tutti i dettagli quanto annunciato in precedenza. La recensione di Young non è soltanto positiva, ma addirittura autocritica della precedente stroncatura del lavoro di Caccioppoli: «Benché le definizioni e i teoremi dell'autore siano dati in termini precisi, egli arriva a dimostrare che la sua definizione di perimetro coincide con quella proposta da Caccioppoli di misura $(n-1)$-dimensionale della frontiera. Ciò rende possibile un miglior giudizio sugli scopi delle definizioni di Caccioppoli».

Ennio considerava questa come la miglior recensione pubblicata dal MR a suo riguardo.

Nella nota [14] De Giorgi analizza le proprietà geometriche delle frontiere degli insiemi di perimetro finito. In esse individua una parte, che chiama frontiera ridotta, supporto della misura gradiente della funzione caratteristica dell'insieme e sulla quale la variazione totale di questa misura coincide con la misura di Hausdorff $(n-1)$-dimensionale. De Giorgi prova altresì l'esistenza di un iperpiano tangente alla frontiera dell'insieme, in ogni punto della frontiera ridotta.

Questi risultati, assolutamente non banali e che costituiranno il punto di partenza per lo studio della regolarità delle frontiere, quando queste saranno soluzioni di opportuni problemi variazionali, non trovarono il dovuto riconoscimento nella recensione di L.C. Young.

Young sottolineò invece il valore della proprietà isoperimetrica della ipersfera, che è provata nella nota [19]. Con questa si chiuse, nel 1958, il ciclo dedicato alla teoria degli insiemi di perimetro finito, aperto al Congresso di Salisburgo nel settembre 1952.

La risoluzione del XIX Problema di Hilbert

Le quattro note [15], [16], [17] e [28] sono dedicate alla risoluzione del XIX Problema di Hilbert. La prima è il testo di una comunicazione al V congresso dell'Unione Matematica Italiana, tenutosi dal 6 al 9 ottobre 1955 a Pavia e Torino. Questo testo è storicamente molto significativo. Il titolo mostra come l'intervento al Congresso fosse stato deciso da De Giorgi con l'intenzione di esporvi il lavoro sui perimetri degli insiemi, la diseguaglianza isoperimetrica e le applicazioni al Calcolo delle variazioni. A questi argomenti è dedicato infatti il primo paragrafo della nota. Nel secondo paragrafo è presentato il risultato di regolarità per i minimi dei funzionali regolari del Calcolo delle Variazioni. C'è sicuramente un legame fra i due paragrafi, dal momento che nella dimostrazione della regolarità si fa uso della proprietà isoperimetrica della ipersfera. Ma il fatto che la risoluzione del XIX Problema di Hilbert non si fosse meritato il titolo della comunicazione, conferma che De Giorgi non aveva ottenuto ancora tale risultato quando si iscrisse al Congresso. La vicenda del teorema di regolarità, raccontata da Enrico Magenes durante la Commemorazione di Ennio all'Accademia dei Lincei, ebbe infatti uno svolgimento folgorante. Nell'agosto 1955, durante una camminata nei pressi del Passo Pordoi, De Giorgi apprese da Guido Stampacchia dell'esistenza del XIX Problema. Egli dovette subito vedere la possibilità di applicare alla risoluzione del problema i risultati delle sue ricerche sulla geometria dei sottoinsiemi degli spazi euclidei pluridimensionali, dal momento che in meno di due mesi fu in grado di presentare al Congresso dell'UMI la sua risoluzione del Problema di Hilbert. Questa storia mette in luce uno degli aspetti della personalità scientifica di De Giorgi: una intuizione fulminea unita ad una capacità eccezionale di far seguire ad essa una dimostrazione curata nei minimi dettagli. L'altro aspetto della personalità di Ennio è quello che abbiamo cercato di mettere in risalto parlando delle sue ricerche sui perimetri, un lavoro di lunga lena condotto in un pressoché totale isolamento.

Il contenuto della nota [15] è stato meglio precisato nella nota lincea [16]. Questa fu recensita da L.M. Graves che non diede a vedere di essersi reso conto del valore eccezionale del risultato.

C.B. Morrey, Jr. recensì la nota [17], contenente tutti i dettagli della dimostrazione del teorema di regolarità. Scrivendo «l'autore dimostra il seguente importante e fondamentale risultato» Morrey accompagnò l'ingresso di De Giorgi nella stretta cerchia dei grandi matematici di tutti i tempi.

La nota [28] che seguì la precedente dopo oltre un decennio, contiene l'indicazione di una soluzione debole e discontinua di un sistema uniformemente ellittico. Quindi la questione sollevata da Hilbert nel XIX problema ha una risposta negativa, se viene estesa alle funzioni vettoriali. Ciò fu giustamente sottolineato nella recensione di G.M. Ewing.

Il problema di Plateau

Le note [21], [22], [23], [26] e [30] riguardano il Problema di Plateau.

La nota [21] è una raccolta di risultati della teoria dei perimetri, che verranno utilizzati nella nota [22] per dimostrare l'analiticità quasi ovunque delle frontiere minime. Questo successo è l'esempio eclatante di quella che De Giorgi aveva indicato come l'opportunità dell'uso della teoria dei perimetri nel Calcolo delle Variazioni. Il risultato di regolarità delle frontiere minime era considerato da lui la vittoria ottenuta sulla più audace delle sue sfide scientifiche. Le note [21] e [22] furono recensite da Wendell H. Fleming, il quale a proposito della seconda scrisse «È dimostrato un profondo teorema sulla regolarità delle soluzioni del problema di minimo per l'area $(n-1)$-dimensionale nello spazio euclideo a n dimensioni».

Nella nota [23] è dimostrata la tesi del Teorema di Bernstein per le soluzioni dell'equazione delle superficie minime in tutto lo spazio euclideo a tre dimensioni. Il classico Teorema di Bernstein era noto nel caso bidimensionale, ed aveva avute molte dimostrazioni, la più semplice delle quali lo derivava dal Teorema di Liouville per le funzioni olomorfe di una variabile complessa. L'estensione di De Giorgi si avvale di una osservazione di Fleming sulla validità del Teorema di Bernstein n-dimensionale come conseguenza della non esistenza di frontiere minime singolari n-dimensionali. La nota fu recensita da R. Osserman, che sottolineò il valore della estensione al caso tridimensionale, per il quale nessuno dei classici metodi bidimensionali era utilizzabile.

La nota [26] è il testo di un intervento che De Giorgi aveva preparato per il Congresso Internazionale dei Matematici di Mosca del 1966. In esso sono esposti i risultati riguardanti le ipersuperficie minime pluridimensionali. L'intervento fu letto al Congresso da Vesentini, per l'impossibilità di Ennio di recarsi in Unione Sovietica. La nota fu recensita da F.J. Almgren, Jr. che sottolineò come la gran parte dei risultati esposti fosse opera di De Giorgi stesso.

La nota [30], della quale sono coautori Enrico Bombieri ed Enrico Giusti, perfezionò le conoscenze sulle frontiere minime pluridimensionali, con la dimostrazione della esistenza di frontiere minime singolari 7-dimensionali, e di soluzioni intere non banali per l'equazione delle superficie minime in 8 variabili.

Nella nota [24], scritta in collaborazione con Guido Stampacchia, si prova che ogni soluzione dell'equazione delle superficie minime, definita in $A \setminus K$, dove A è un aperto n-dimensionale e K un sottoinsieme compatto di A di misura $(n-1)$-dimensionale nulla, è analiticanente prolungabile su tutto A. Il risultato è conseguenza di un raffinamento del principio del massimo per le soluzioni dell'equazione delle superficie minime. Risultati più deboli erano stati ottenuti con metodi analoghi o del tutto diversi da L. Bers, R. Finn, J.C.C. Nitsche e R. Osserman, come fu osservato da Lamberto Cesari nella sua recensione.

Successivamente, nel volume degli Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, dedicato nel 1977 ad Hans Lewy, è stato pubblicato un perfezionamento del risultato di De Giorgi e Stampacchia ad opera di Mario Miranda: è sufficiente supporre che K sia chiuso in A, invece che compatto in A. Questo perfezionamento non è banale, per ottenerlo si utilizza la diseguaglianza di Harnack sulle frontiere minime, dimostrata nel 1973 da Bombieri e Giusti, i quali utilizzarono tutto quanto era stato dimostrato da De Giorgi e dagli allievi di lui a proposito delle frontiere minime.

Nella breve nota [27], non recensita, De Giorgi congettura la validità della stima locale del gradiente delle soluzioni della equazione delle superficie minime n-dimensionali. Questa diseguaglianza verrà subito dopo dimostrata da lui stesso nella nota [31], di cui sono coautori Bombieri e Miranda. La suddetta stima permise la dimostrazione della analiticità delle soluzioni deboli n-dimensionali della equazione delle superficie minime, quindi l'estensione del teorema di regolarità di De Giorgi al caso di un funzionale non regolare in senso stretto.

Le equazioni alle derivate parziali e i fondamenti della Γ-convergenza

Gli esempi di non unicità

Quello del 1953 sulla non-unicità per l'equazione di Laplace ([9]) può essere considerato il primo lavoro non giovanile di De Giorgi. Prendendo lo spunto da un teorema del 1947 di Gaetano Fichera, De Giorgi costruisce una funzione, non identicamente nulla, armonica in un semicerchio D del piano reale, nulla sul tratto curvilineo della frontiera di D e con derivata normale quasi ovunque nulla sul tratto rettilineo. Anche se non ha avuto la stessa risonanza dei successivi, questo lavoro contiene già alcuni dei tratti distintivi e dei temi ricorrenti della matematica di De Giorgi. Si coglie ad esempio una straordinaria abilità nel costruire sofisticate funzioni con l'aiuto di strumenti elementari, come gli integrali, le serie, i fattoriali, le convoluzioni. Fanno la prima comparsa le famose *greche* (cioè le funzioni periodiche a due valori) e le tracce delle funzioni armoniche, che più tardi diventeranno i funzionali analitici. De Giorgi non nascondeva la sua simpatia per i contro-esempi, di cui apprezzava in particolare il poterli esporre in poche pagine. Ripeteva spesso che, nel cercare di dimostrare un qualche risultato, era sempre opportuno riservare una parte dei propri sforzi alla ricerca del risultato opposto, cioè un eventuale contro-esempio.

Nel 1955 ([13]) De Giorgi pubblica un altro esempio di *soluzione nulla* di un'equazione alle derivate parziali, ma il contesto è ora quello dei problemi di Cauchy. Viene costruita un'equazione del tipo $\partial_t^8 u + a_1(x,t)\,\partial_x^4 u + a_2(x,t)\,\partial_x^2 u + a_3(x,t)\,u = 0$ con coefficienti regolari, che ammette una soluzione regolare, non banale, identicamente nulla nel semipiano $\{t \leqslant 0\}$.

Questo lavoro di poche pagine, privo di ogni riferimento bibliografico, ha avuto una notevole eco nel mondo matematico, suscitando in particolare l' interesse di Carleman e l'ammirazione di Leray. Quest'ultimo nel 1966 costruirà alcuni altri *contre-examples du type De Giorgi*. Per una di quelle coincidenze non infrequenti nella storia della matematica, pochi mesi prima di De Giorgi, a Cracovia, Andrzej Plis aveva costruito il primo esempio di non unicità per un *sistema kovalewskiano* a coefficienti regolari. A differenza di Plis, De Giorgi non tornerà più su questa problematica.

Curiosamente, fra i vari lavori di non-unicità che riprendono le tecniche di De Giorgi, ve n'è uno, del 1960, di un giovane matematico americano, Paul J. Cohen. Questi poco dopo sposterà i suoi interessi verso la Logica, ottenendo fondamentali risultati sull'Ipotesi del Continuo che gli varranno la medaglia Fields. De Giorgi era un grande estimatore dell'opera logica di Cohen.

Classi di Gevrey ed equazioni iperboliche

De Giorgi chiama *parabolica* l'equazione dell'ottavo ordine del suo esempio di non unicità, ma, in riferimento alla variabile di evoluzione, questa dovrebbe dirsi *iperbolica* (in senso debole). I coefficienti di tale equazione appartengono alla classe delle funzioni $\mathcal{C}^\infty$, ma non alla classe delle funzioni analitiche, altrimenti sarebbe violato il teorema di unicità di Holmgren. In un altro lavoro del 1955 ([12]), De Giorgi considera equazioni di evoluzione di tipo più generale e, facendo riferimento ad una famiglia di spazi funzionali intermedi fra le due classi sopra ricordate, individua la regolarità minima dei coefficienti che assicuri l'unicità al problema di Cauchy. Questi spazi intermedi, oggi detti *classi di Gevrey*, sono gli spazi G^s delle funzioni le cui derivate j-me, al crescere di j, hanno ordine di crescita non superiore a $j!^s$ $(s>1)$. Ciò che De Giorgi prova è l' unicità per ogni equazione del tipo $\partial_t^m u + \sum_{h,k} a_{hk}(t,x)\, \partial_t^k \partial_x^h u = 0$, a coefficienti in G^s, sotto la condizione che in essa siano presenti solo termini con $sk+h \leqslant m$.

Vari anni più tardi, nel 1978, De Giorgi tornerà ad interessarsi a questi temi, scrivendo, insieme a Ferruccio Colombini e Sergio Spagnolo, un lavoro sulle equazioni iperboliche del secondo ordine a coefficienti non lipschitziani nella variabile temporale ([50]). Viene messo in luce un fenomeno nuovo: ai fini della risolubilità del problema di Cauchy, la scarsa regolarità in t dei coefficienti può essere compensata da una maggiore regolarità in x dei dati iniziali. In particolare, se i coefficienti dell'equazione sono hölderiani, per avere l'esistenza di soluzioni basterà scegliere i dati iniziali in (opportune) classi di Gevrey, mentre nel caso di coefficienti discontinui occorre prendere i dati nella classe delle funzioni analitiche.

Insieme ad alcune congetture ([83] e [142]) che meriterebbero di essere approfondite, questi sono i soli lavori che De Giorgi ha dedicato alle equazioni iperboliche. Peraltro egli ha continuato a mostrare un interesse particolare verso questa teoria, specialmente su un possibile «approccio variazionale» al problema dell'esistenza globale per l'equazione delle onde non lineari.

Soluzioni analitiche di equazioni a coefficienti costanti

Nella seconda metà degli anni '60, fra i cultori della teoria generale delle Equazioni alle Derivate Parziali circolava un problema apparentemente innocuo, ma di fronte al quale gli strumenti dell'Analisi Funzionale apparivano inadeguati: data un'equazione a coefficienti costanti, $P(D)u = f(x)$, con $f(x)$ *analitica* nello spazio euclideo n-dimensionale, dire se esiste una qualche soluzione $u(x)$ *analitica* su tutto $\boldsymbol{R}^n$. L'esistenza di una qualche soluzione $\mathcal{C}^\infty$ era assicurata dal teorema di Malgrange-Ehrenpreis, ma la natura generale dell'operatore non permetteva di asserire che tale soluzione fosse anche analitica.

De Giorgi aveva una particolare sensibilità per le funzioni analitiche reali, mentre aveva poca familiarità con quelle olomorfe. A queste ultime egli preferiva, per la loro maggiore duttilità, il loro contr'altare reale, cioè le funzioni armoniche. Nel 1963, memore delle belle lezioni romane di Fantappié, aveva assegnato una tesi di laurea sui funzionali analitici reali a un brillante studente della Normale, Francesco Mantovani, il quale (prima di abbandonare una sicura carriera universitaria per entrare in un convento di Cappuccini e infine partire missionario per le isole di Capo Verde) aveva scritto un lavoro sull'argomento insieme a Sergio Spagnolo. Non sorprende dunque che, venuto a conoscenza del problema della surgettività analitica, De Giorgi cominciasse a pensarvi, sia pure in modo saltuario. Una delle sue «teorie» era che non si deve mai abbandonare completamente un problema difficile, ma conviene tenerselo come «problema guida» sul quale ritornare di tanto in tanto.

Finalmente, nel 1971, De Giorgi e Lamberto Cattabriga ([34]) riescono a risolvere il problema, e la soluzione è piuttosto sorprendente: in $\boldsymbol{R}^2$ ogni equazione a coefficienti costanti con secondo membro analitico ha qualche soluzione analitica, mentre in dimensione $n \geqslant 3$ vi sono esempi di equazioni, anche molto semplici come quella del calore, per le quali la soluzione analitica può mancare. Questi esempi saranno in seguito completati da Livio C. Piccinini. La dimostrazione dell'esistenza si basa fra l'altro su una formula di rappresentazione delle funzioni analitiche reali che è alla base della teoria dei funzionali armonici ed analitici ([33]). Il risultato sarà in seguito raffinato in altre note con Cattabriga ([37] e [44]), mentre alcune congetture sull'argomento sono proposte in [36] e [42].

I fondamenti della Γ-convergenza

La teoria della Γ-convergenza può farsi risalire ad un semplice, paradigmatico esempio che De Giorgi andava divulgando nella metà degli anni '60. Si trattava di una famiglia di equazioni ordinarie dipendenti da un parametro intero k, del tipo $D(a_k(x)Du) = f(x)$, dove i coefficienti $a_k(x)$ sono delle *greche* assumenti alternativamente due valori positivi, λ e Λ, in intervallini contigui di ampiezza 2^{-k}. Fissato un qualche intervallo $[a, b]$, possiamo associare a tali equazioni le condizioni di Dirichlet $u(a) = u(b) = 0$, ottenendo così, per ogni $f(x)$, un'unica soluzione $u = u_k(f, x)$. Che cosa accade al crescere di k verso l'infinito? Per rispondere, in questo caso elementare, basta scrivere esplicitamente le soluzioni $u_k(f, x)$: si vedrà allora che queste convergono verso la soluzione $u(f, x)$ dell'equazione (a coefficiente costante) $\tilde{a}D^2 u = f(x)$, dove $\tilde{a} = 2\lambda\Lambda/(\lambda + \Lambda)$ è la *media armonica* dei due valori λ e Λ, ovvero $1/\tilde{a}$ è il limite debole della successione $\{1/a_k(x)\}$. Poiché questa conclusione è indipendente sia dall'intervallo fissato che dalla funzione $f(x)$, si può ragionevolmente asserire che l'operatore $\tilde{a}D^2$ rappresenta il «limite» degli operatori $\{D(a_k(x)\,D)\}$ per $k \to \infty$.

Nel 1967-68, sviluppando le idee di De Giorgi, Spagnolo (1) aveva introdotto la *G-convergenza*, ossia la convergenza delle funzioni di Green per operatori ellittici del tipo $A_k = \sum D_j(a_{ij,\,k}(x)\,D_i)$, definendola come la convergenza debole, in opportuni spazi funzionali, della successione degli inversi $\{A_k^{-1}\}$.

Nel 1973, col lavoro sulla «convergenza delle energie» ([40]), De Giorgi e Spagnolo mostrano il carattere variazionale della G-convergenza, mettendola in relazione con la convergenza dei funzionali dell'energia associati agli operatori A_k. Ciò consente fra l'altro di calcolare, sia pure non esplicitamente, i coefficienti dell'operatore G-limite, e di inquadrare in modo naturale alcuni problemi fisici di omogeneizzazione proposti da

(1) Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, (3) **21** (1967), 657-699; *ibid.*, (3) **22** (1968), 571-597.

Enrique Sanchez-Palencia. La teoria dell'*omogeneizzazione* nasce da problemi di elettrostatica o conducibilità termica su materiali composti da due sostanze, una principale (come il ferro) nella quale si trovano presenti, e disposte in modo regolare, numerose piccole «impurità» di un'altra sostanza (come il carbone). Dal punto di vista matematico, l'omogeneizzazione può essere interpretata come un caso particolare di G-convergenza, in cui gli operatori A_k hanno coefficienti *periodici* con periodi che tendono a zero, cioè $a_{ij,\,k}(x) = \alpha_{ij}(kx)$. È questa una problematica che ha avuto un notevole sviluppo per tutti gli anni '70 ed '80, soprattutto in Italia, in Francia, nell'Unione Sovietica e negli Stati Uniti, ed è tuttora oggetto di approfondite ricerche. A parte la Scuola pisana, i primi importanti contributi alla teoria matematica dell'omogeneizzazione sono dovuti a François Murat e Luc Tartar, di Parigi.

Nel lavoro del 1975 dedicato a Mauro Picone per i suoi 90 anni ([43]), De Giorgi abbandona la G-convergenza «operazionale», spostandosi completamente sul versante «variazionale». Invece di una successione di equazioni differenziali, egli considera ora una successione di *problemi di minimo* per funzionali del Calcolo delle Variazioni. Si tratta qui di «funzionali dell'area», cioè integrali in cui le integrande sono funzioni a crescita lineare nel gradiente della funzione incognita. Senza curarsi di scrivere i corrispondenti operatori di Eulero (che in questo caso non sono lineari), De Giorgi stabilisce che cosa debba intendersi per *limite variazionale* di questa successione di problemi, ottenendo al tempo stesso un risultato di compattezza. Nasce così la Γ-convergenza. La definizione formale di Γ-convergenza di una successione $\{f_k(x)\}$ di funzioni definite su uno spazio topologico X e a valori reali, o reali estesi, appare pochi mesi più tardi in una nota con Tullio Franzoni ([45], cf. anche [52]): $\{f_k\}$ è Γ-convergente verso f se in ogni punto x_0 dello spazio X sono verificati questi due fatti: per ogni successione di punti $\{x_k\}$ convergente ad x_0 si ha $\liminf_k f_k(x_k) \geqslant f(x_0)$, e inoltre esiste almeno una di tali successioni $\{x_k\}$ per cui $\{f_k(x_k)\}$ converge a $f(x_0)$.

Questa semplice definizione ha una portata vastissima, sia dal punto di vista teorico che applicativo. Oltre ad includere come caso particolare la vecchia nozione di G-convergenza, essa consente, al variare dello spazio X, di inquadrare in modo unificante praticamente tutte le strutture topologiche esistenti, oltre ad alcuni importanti concetti logico-funtoriali. Inoltre la Γ-convergenza apre la strada a tutto un mondo di nuovi problemi, alcuni proposti sin dall'inizio da De Giorgi (cf. [51], [54], [55]), come stabilire se certe famiglie di funzionali sono Γ-compatte, o almeno Γ-chiuse, trovare il comportamento asintotico di particolari successioni (per lo più di tipo *omogeneizzante*) di problemi variazionali, e così via. De Giorgi stesso, solitamente molto sobrio quando parlava dei suoi risultati, andava fiero di questa creazione, reputandola uno strumento concettuale di grande importanza.

Problemi asintotici nel Calcolo delle Variazioni

Gli sviluppi della Γ-convergenza

Durante la seconda metà degli anni '70 ed i primi anni '80 De Giorgi si impegna a sviluppare le tecniche della Γ-convergenza ed a promuovere il suo impiego in diversi problemi asintotici del calcolo delle variazioni. Una caratteristica del suo lavoro in questo periodo è quella di animare un vivace gruppo di ricerca, introducendo idee feconde e tecniche originali, e lasciando spesso ad altri il compito di svilupparle autonomamente in vari problemi specifici.

Nel lavoro [47] De Giorgi introduce la definizione dei cosiddetti Γ-limiti multipli, cioè per funzioni di più variabili, e se ne serve per inquadrare la nozione di G-convergenza in un quadro astratto molto generale. Queste nozioni hanno aperto la strada all'utilizzazione, da parte di altri matematici, delle tecniche di Γ-convergenza nello studio del comportamento asintotico di punti di sella in problemi di minimax e di soluzioni di problemi di controllo ottimale.

Nel lavoro [51] De Giorgi indica alcune linee di ricerca in cui si possono applicare le tecniche della Γ-convergenza, riassumendo i principali risultati dimostrati fino a quel momento dalla sua scuola, e formulando interessanti congetture che hanno esercitato una feconda influenza per molti anni. In questo lavoro sono formulate per la prima volta in forma esplicita alcune linee guida per lo studio del Γ-limiti di funzionali integrali, che erano già state adottate in forma implicita nel lavoro [43].

Si tratta di quello che sarà chiamato «metodo di localizzazione», che consiste essenzialmente in questo. Se si deve studiare il Γ-limite di una successione di funzionali integrali definiti su un aperto Ω di $\boldsymbol{R}^n$, non ci si limita ad esaminare il problema soltanto su Ω, ma lo si studia contemporaneamente su tutti i sottoinsiemi aperti di Ω. Questo impone di considerare i funzionali in esame come dipendenti sia da un aperto che da una funzione. Nel caso di integrandi positivi, il Γ-limite risulta essere una funzione crescente dell'aperto. È proprio lo studio delle sue proprietà come funzione d'aperto che permette in molti casi di rappresentare il Γ-limite come un integrale.

Questa è una delle motivazioni per lo studio delle proprietà generali delle funzioni crescenti d'insieme e dei loro limiti, che sono oggetto dell'articolo [48], scritto in collaborazione con Giorgio Letta. Tale lavoro contiene anche lo studio approfondito della nozione di integrale rispetto ad una funzione crescente d'insieme (non necessariamente additiva), ed un teorema generale che caratterizza i funzionali che possono essere rappresentati mediante un integrale di questo tipo.

Nel lavoro [53], con Luciano Modica, si utilizza la Γ-convergenza per costruire un esempio di non unicità per il problema di Dirichlet per il funzionale dell'area in forma cartesiana sul cerchio.

Un'applicazione diversa della Γ-convergenza è oggetto dell'articolo [57], con Gianni Dal Maso e Placido Longo, in cui si studia il comportamento asintotico delle soluzioni di problemi di minimo con ostacoli unilaterali per l'integrale di Dirichlet $\int_\Omega |Du|^2\,dx$. Data un'arbitraria successione di ostacoli, verificante un'ipotesi di limitazione dall'alto molto debole, si individua una sottosuccessione che ammette un problema limite, nel senso che le soluzioni dei corrispondenti problemi d'ostacolo convergono debolmente alla soluzione del problema limite. Tale problema asintotico, che viene costruito mediante il metodo di localizzazione dei Γ-limiti, è un problema di minimo per un nuovo funzionale integrale, in cui intervengono anche delle misure singolari. L'articolo [59] costituisce la presentazione di questi risultati al convegno SAFA IV (Napoli, 1980).

Nei lavori [60] e [63] De Giorgi presenta i Γ-limiti in un quadro astratto molto generale partendo dalla nozione più elementare di operatore di tipo G, basata unicamente sulle relazioni d'ordine, ed esplora le possibilità di estendere queste nozioni al caso di funzioni a valori in reticoli completi. Tale progetto è precisato negli articoli [62] e [66], scritti in collaborazione con Giuseppe Buttazzo e Tullio Franzoni rispettivamente. Nel primo di tali articoli vengono anche presentate delle linee guida per le applicazioni della Γ-convergenza allo studio dei limiti di soluzioni di equazioni differenziali, sia ordinarie che alle derivate parziali, includendo in questo quadro generale anche i problemi di controllo ottimo.

Negli articoli [68], con Dal Maso, e [73], che costituisce il testo della conferenza al Congresso Internazionale dei Matematici tenutosi a Varsavia nel 1983, De Giorgi presenta i principali risultati della Γ-convergenza e fa una rassegna delle più significative applicazioni al calcolo delle variazioni ottenute dalla sua scuola.

Nei lavori [72], [78], [84] viene costruito un quadro astratto generale per lo studio dei Γ-limiti di funzionali aleatori, che permette di affrontare i problemi di omogeneizzazione stocastica con tecniche di Γ-convergenza. I lavori di Dal Maso e Modica avevano risolto questi problemi nel caso di funzionali integrali equi-coercitivi, sfruttando il fatto che in questo caso lo spazio dei funzionali considerati risultava metrizzabile e compatto rispetto alla Γ-convergenza. Queste proprietà consentivano di studiare la convergenza delle leggi di probabilità di successioni di funzionali aleatori utilizzando l'ordinaria nozione di convergenza debole di misure. Nel caso di funzionali aleatori che non siano equi-coercitivi, lo spazio dei funzionali può ancora essere dotato di una topologia legata alla Γ-convergenza, ma tale topologia non è più metrizzabile, e, pur essendo di Hausdorff, ha alcune proprietà patologiche, che implicano che le uniche funzioni continue su tale spazio sono costanti.

Nel lavoro [72] De Giorgi propone varie nozioni di convergenza per misure definite sullo spazio delle funzioni semicontinue inferiormente, e formula una serie di quesiti la cui risoluzione permetterebbe di determinare la nozione più adatta allo studio Γ-limiti di funzionali aleatori. Tale nozione viene individuata nei lavori [78] e [84], con Dal Maso e Modica, che ne studiano in dettaglio le principali proprietà.

Nell'articolo [104] De Giorgi propone un metodo per studiare i limiti di soluzioni di equazioni lineari alle derivate parziali del primo ordine $A_j u = f$, basato sullo studio dei Γ-limiti dei funzionali $\|A_j u - f\|^2_{L^2}$.

Problemi di semicontinuità e rilassamento

Le note [32] del corso tenuto da De Giorgi all'INdAM nel 1968-69, pur non essendo mai state pubblicate, costituiscono un lavoro fondamentale nel campo dei problemi di semicontinuità per gli integrali multipli, e hanno avuto egualmente un'ampia diffusione tra gli studiosi interessati. In esse compare la prima dimostrazione della semicontinuità inferiore (per successioni) del funzionale $F(u, v) = \int_\Omega f(x, u(x), v(x))\,dx$ rispetto alla convergenza forte della funzione u ed alla convergenza debole della funzione v, nella sola ipotesi che l'integranda $f(x, s, \xi)$ sia non negativa, continua nelle tre variabili (x, s, ξ), e convessa in ξ. Il risultato è ottenuto mediante un ingegnoso procedimento di approssimazione dal basso dell'integranda $f(x, s, \xi)$, che riduce il problema al caso di integrande molto più semplici.

Il lavoro [70], con Buttazzo e Dal Maso, affronta il problema della semicontinuità del funzionale $\int_\Omega f(u(x), Du(x))\,dx$ senza supporre la semicontinuità in s dell'integranda $f(s, \xi)$, tranne che per $\xi = 0$. Le sole ipotesi sono che $f(s, \xi)$ sia una funzione non negativa, misurabile in s, convessa in ξ, limitata nell'intorno dei punti del tipo $(s, 0)$, e tale che la funzione $s \mapsto f(s, 0)$ sia semicontinua inferiormente su $\boldsymbol{R}$.

Nel lavoro [75] De Giorgi, dopo aver riassunto i principali risultati di [70], formula alcune interessanti congetture su problemi di semicontinuità e rilassamento per funzionali integrali dipendenti da funzioni scalari o vettoriali. Alcune di esse sono alla base di importanti lavori sviluppati autonomamente da altri matematici.

Il lavoro [85], scritto in collaborazione con Luigi Ambrosio e Giuseppe Buttazzo, studia il problema del rilassamento per il funzionale $F(u) = \int_\Omega f(x, u(x))\,d\lambda(x)$ definito per $u \in L^1(\Omega, \lambda; \boldsymbol{R}^n)$. Vi si dimostra un teorema di rappresentazione integrale per l'inviluppo semicontinuo inferiormente di F nello spazio delle misure di Radon limitate su Ω, dotato della topologia della convergenza debole *.

Problemi di evoluzione per funzionali non differenziabili

All'inizio degli anni '80 De Giorgi propone un nuovo metodo per lo studio di problemi di evoluzione in una serie di lavori scritti in collaborazione con Antonio Marino e Mario Tosques, cui si aggiunge in seguito Marco Degiovanni. In [58] la nozione di soluzione dell'equazione di evoluzione $u'(t) = -\nabla f(u(t))$ viene estesa al caso di funzioni f definite su spazi metrici, attraverso un'opportuna definizione di pendenza di f e la corrispondente nozione di curva u di massima pendenza. In questo contesto vengono dimostrati vari teoremi di esistenza per curve di massima pendenza sotto ipotesi molto deboli sulla funzione f.

Nell'articolo [67] viene introdotta la nozione di funzione (p, q)-convessa su spazi di Hilbert e viene dimostrato un teorema di esistenza ed unicità per le relative equazioni di evoluzione. Questi risultati vengono estesi in [71] a funzioni non convesse di tipo più generale, e ad un'ampia classe di operatori non monotoni. Oltre che nella situazione classica in cui si considerano somme di funzioni convesse e di funzioni regolari, questi risultati sono applicabili a molti casi in cui è presente un vincolo non convesso e non differenziabile.

La teoria delle soluzioni di equazioni di evoluzione sviluppata in questi lavori ha permesso a Degiovanni, Marino, Tosques e ai loro collaboratori di estendere le tecniche di deformazione dell'analisi non lineare a molte situazioni in cui intervengono funzionali non differenziabili, e di ottenere un gran numero di risultati di molteplicità di soluzioni in problemi stazionari con vincoli unilaterali.

I più recenti sviluppi nel Calcolo delle Variazioni

Problemi con discontinuità libere

Nel 1987 De Giorgi propone, in un lavoro scritto con Luigi Ambrosio [86], tradotto in inglese in [89], una teoria molto generale per lo studio di una nuova classe di problemi variazionali caratterizzati dalla minimizzazione di energie di volume ed energie di superficie. In un lavoro successivo [106] De Giorgi chiamerà questa classe «problemi con discontinuità libere», alludendo al fatto che l'insieme dove sono concentrate le energie di superficie non è fissato a priori e che è sovente rappresentabile mediante l'insieme di discontinuità di un'opportuna funzione ausiliaria. Problemi di questo tipo sono suggeriti dalla teoria statica dei cristalli liquidi e da certi modelli variazionali in meccanica delle fratture. Soprendentemente, in quegli stessi anni David Mumford e Jayant Shah propongono, nell'ambito di un approccio variazionale al riconoscimento di immagini, un problema al quale la teoria di De Giorgi si adatta perfettamente: la minimizzazione del funzionale

$$\int_{\Omega\setminus K} |\nabla u|^2 \, dx + \alpha \int_{\Omega\setminus K} |u-g|^2 \, dx + \beta \mathcal{H}^1(K \cap \Omega)$$

tra tutte le coppie (K, u) con K chiuso contenuto in $\overline{\Omega}$ e $u \in C^1(\Omega\setminus K)$ (qui Ω è un rettangolo del piano, α e β sono costanti positive, $g \in L^\infty(\Omega)$, mentre $\mathcal{H}^1$ è la misura di Hausdorff unidimensionale). La teoria proposta da De Giorgi si basa sull'introduzione del nuovo spazio funzionale $SBV(\Omega)$ delle funzioni speciali a variazione limitata, il cui studio è stato poi approfondito da Luigi Ambrosio in alcuni lavori successivi. Nel lavoro [93], scritto in collaborazione con Michele Carriero ed Antonio Leaci, De Giorgi dimostra l'esistenza di soluzioni per il problema posto da Mumford e Shah. Ai problemi con discontinuità libere, ancora oggi oggetto di ricerche da parte di molti matematici italiani e stranieri, sono dedicati anche i lavori [97], [102], [110]. Molte congetture, ancora largamente aperte, sono presentate in un lavoro dedicato a Luigi Radicati [92].

Evoluzione secondo la curvatura media

Alla fine degli anni '80 De Giorgi si interessa attivamente ad una classe di problemi di evoluzione geometrica di tipo parabolico. Il problema modello è l'evoluzione di superfici k-dimensionali Γ_t secondo la curvatura media, nel quale si richiede che la velocità normale di Γ_t in ciascun punto sia eguale al vettore curvatura media della superficie; essendo tale vettore legato alla variazione prima della misura k-dimensionale di Γ_t, dal punto di vista euristico questa evoluzione può essere pensata come la curva di massima pendenza del funzionale area. Nel corso degli anni De Giorgi ha proposto diversi metodi per definire soluzioni deboli del problema e per calcolare soluzioni approssimate; le sue idee sono state poi sviluppate da diversi matematici.

Il primo metodo, proposto da De Giorgi in [98], [100], [109] e [133], si basa sull'approssimazione del moto per curvatura media in codimensione uno mediante le soluzioni delle equazioni paraboliche

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = \Delta_x u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} u_\varepsilon (1 - u_\varepsilon^2), \qquad u_\varepsilon(t, x) : [0, +\infty) \times \boldsymbol{R}^n \to (-1, 1).$$

In questo caso le superfici Γ_t sono viste come frontiere di opportuni insiemi E_t, che possono essere approssimati dagli insiemi $\{u_\varepsilon(t, \cdot) > 0\}$ al tendere di ε a zero. Una motivazione euristica per questo risultato di convergenza è un teorema dimostrato da Luciano Modica e Stefano Mortola nei primissimi anni dello sviluppo della Γ-convergenza. Infatti le equazioni paraboliche scritte sopra sono proprio, a meno di un riscalamento temporale, le curve di massima pendenza associate a funzionali del tipo di Modica–Mortola, convergenti al funzionale area. È quindi ragionevole aspettarsi convergenza anche per le rispettive curve di massima pendenza. In un lavoro dedicato a Giovanni Prodi [108], De Giorgi presenta una rassegna di congetture su questo argomento; alcune di queste sono state dimostrate indipendentemente da Piero De Mottoni, Michelle Schatzman, Xinfu Chen, Tom Ilmanen, Lawrence C. Evans, Halil Mete Soner, Panagiotis Souganidis. Altre importanti congetture, tutte largamente aperte, sono presentate qualche anno dopo in un lavoro dedicato a John Nash [142] in un contesto più generale che include anche equazioni di tipo iperbolico e curve di massima pendenza associate a funzionali dipendenti dalla curvatura della varietà.

Altri metodi proposti da De Giorgi hanno una portata molto generale, e ad esempio sono applicabili al caso dell'evoluzione di superfici di dimensione e codimensione arbitraria. Ricordiamo ad esempio il metodo delle barriere, proposto in [117], [118], [120], [124], [125] e ispirato al metodo di Perron, che consente di definire soluzioni deboli a partire da una certa classe di soluzioni regolari; questo metodo è stato in seguito compiutamente sviluppato da due suoi allievi, Giovanni Bellettini e Matteo Novaga, e confrontato con la teoria delle soluzioni nel senso della viscosità. Ricordiamo anche l'idea di studiare le proprietà geometriche di una varietà Γ attraverso le proprietà analitiche della funzione $\eta(x, \Gamma) = \mathrm{dist}^2(x, \Gamma)$, presentata la prima volta in [92] e poi, nel contesto dei problemi di evoluzione, in [125]: usando la funzione $\eta(t, x) = \eta(x, \Gamma_t)$ il moto per curvatura media può essere descritto dal sistema di equazioni

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial x_i} = \Delta \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \qquad \text{su } \{\eta = 0\}, \quad i = 1, \ldots, n .$$

Questa descrizione è, specialmente in codimensione maggiore di uno, estremamente più semplice di quella ottenibile attraverso una rappresentazione parametrica delle superfici.

Movimenti minimizzanti

Ispirato da un lavoro di Frederick J. Almgren, Jean E. Taylor e Lihe Wang, nel quale era stata studiata un'opportuna discretizzazione temporale del moto per curvatura media, nel 1992 De Giorgi propone in un lavoro dedicato a Enrico Magenes [116] un metodo generale, da lui chiamato «dei movimenti minimizzanti», per studiare le curve di massima pendenza di un funzionale F in uno spazio metrico (X, d). Il metodo di De Giorgi si basa sulla minimizzazione ricorsiva di opportuni funzionali perturbati del tipo $u \mapsto F(u) + G(u, v)$. Nel caso classico si ha $G(u, v) = d^2(u, v)/\tau$, ove $\tau > 0$ è il parametro di discretizzazione temporale, ma soprendentemente (come nel caso dell'evoluzione per curvatura media) il metodo produce risultati interessanti anche quando G non è il quadrato di una funzione distanza, o addirittura non è una funzione simmetrica. Alla teoria dei movimenti minimizzanti è anche dedicato il lavoro [112], e applicazioni a problemi di evoluzione delle partizioni sono presentate in [128] e [140].

Superfici minime in spazi metrici

Nel 1993 De Giorgi ritorna su uno dei temi a lui più cari, la teoria delle superfici minime, proponendo in [135] un'approccio molto generale al problema di Plateau. In questo breve lavoro, che verrà ulteriormente sviluppato in [130], De Giorgi riesce a formulare il problema di Plateau in qualsiasi spazio metrico usando solamente la classe delle funzioni lipschitziane sullo spazio. Questo punto di vista risulta profondamente innovativo anche per gli spazi euclidei o per le varietà riemanniane, nei quali la teoria classica delle superfici minime di Herbert Federer e Wendell H. Fleming si basa sulla dualità con le forme differenziali. Luigi Ambrosio e Bernd Kirchheim hanno dimostrato che la teoria proposta da De Giorgi estende la teoria di Federer–Fleming, e che i classici teoremi di chiusura e rettificabilità del bordo per le correnti intere continuano ad essere veri in questo contesto molto più generale. A temi di teoria geometrica della misura sono anche dedicati i lavori [107], [111], [134].

Dalla Matematica alla Sapienza

Il Seminario sui Fondamenti

A partire dalla metà degli anni '70, stimolato dalle problematiche e dalle difficoltà emerse nelle sue esperienze di insegnamenti di base presso l'Università dell'Asmara, Ennio De Giorgi decise di trasformare uno dei suoi tradizionali corsi presso la Scuola Normale (quello del mercoledì) in un Seminario in cui discutere ed approfondire tematiche fondazionali insieme a studenti e ricercatori interessati, non necessariamente specialisti di Logica, ma anzi possibilmente rappresentativi di diverse discipline, non soltanto matematiche. Inizialmente si proponeva soltanto di trovare una formulazione dei consueti fondamenti insiemistici, atta a fornire una base assiomatica chiara e naturale su cui innestare i concetti fondamentali dell'Analisi Matematica. In questa accezione i Fondamenti, più che fornire una «base certa» su cui posare tutte le costruzioni matematiche, debbono fornire un ambiente (un quadro assiomatico) in cui poter inserire tali costruzioni; più che essere la radice da cui nascono tutti gli alberi della Scienza devono predisporre una rete di sentieri per esplorare le foreste della Scienza.

Dal punto di vista metodologico, De Giorgi seguiva il tradizionale metodo assiomatico *contenutistico* usato nella Matematica classica, cercando gli assiomi fra le proprietà più rilevanti degli oggetti presi in considerazione, ben sapendo che gli assiomi prescelti, come altri eventualmente aggiungibili ad essi, non possono comunque esaurire tutte le proprietà degli oggetti considerati; la sua presentazione era rigorosa, ma non legata ad alcun formalismo, anche se apprezzava la possibilità di fornire formalizzazioni da confrontare con le correnti teorie fondazionali di tipo formale.

Gradualmente le sue riflessioni e le discussioni dentro e fuori del Seminario portarono De Giorgi ad elaborare e proporre teorie sempre più generali: nel suo approccio ai Fondamenti era essenziale individuare ed analizzare alcuni concetti da prendere come fondamentali, senza però dimenticare che l'infinita varietà del reale non si può mai cogliere completamente, in accordo con l'ammonimento

«*ci sono più cose in cielo e in terra di quante ne sogni la tua filosofia*»,

che l'Amleto di Shakespeare dà ad Orazio, e che De Giorgi aveva eletto a sintesi della propria posizione filosofica. Pertanto le caratteristiche essenziali delle sue teorie possono essere sintetizzate in quattro punti:

– *non riduzionismo*: ogni teoria considera molte specie di oggetti, collegate ma non riducibili l'una all'altra (anche la più astuta codifica di un oggetto altera in qualche misura alcune delle sue caratteristiche fondamentali);

– *apertura*: si deve sempre lasciare aperto lo spazio per introdurre liberamente e naturalmente nella teoria nuove specie di oggetti con le loro proprietà;

– *autodescrizione*: le più importanti proprietà, relazioni ed operazioni che coinvolgono gli oggetti studiati dalla teoria, così come le asserzioni ed i predicati che vi si formulano, debbono essere a loro volta oggetti della teoria;

– *assiomatizzazione semi-formale*: la teoria viene esposta utilizzando il metodo assiomatico della matematica tradizionale; varie formalizzazioni della teoria nei sistemi formali della Logica Matematica sono possibili ed utili per studiarne diversi aspetti, ma nessuna di esse può essere presa come definitiva, in quanto in ciascuna va perduta una parte del significato inteso degli assiomi originali. Inoltre, volendo mantenere al minimo le assunzioni metateoriche, vengono privilegiate le assiomatizzazioni finite.

In effetti De Giorgi pensava che un serio studio dei problemi fondazionali portasse a scoprire il valore sapienziale della ricerca e sottolineava l'importanza del rigore matematico non formale, ben rappresentato dal metodo assiomatico tradizionale, che permette di presentare in modo chiaro le proprie proposte, rendendo possibile il contributo critico e propositivo di altri studiosi. Egli vedeva in questa attività il culmine della sua concezione etica della scienza, in cui il dialogo sereno ed aperto tra studiosi di differenti orientamenti, la convivialità della condivisione del sapere, erano visti come fattori di comprensione amicizia e rispetto per le libertà fondamentali, in difesa delle quali riteneva che l'impegno diretto (cui mai si sottrasse) non fosse più importante delle analisi teoriche; illuminanti per tale visione umanistica unitaria del sapere sono molti dei saggi contenuti in [138]: non a caso come esempio tipico di sistema assiomatico fondamentale era solito citare la Dichiarazione Universale dei Diritti Umani del 10/12/1948.

Queste tematiche divennero a poco a poco uno dei suoi principali oggetti di ricerca, portato avanti per un ventennio, con proposte ed elaborazioni di respiro sempre più vasto, che lo impegnarono fino agli ultimi giorni di vita, quando teneva sul comodino nella sua cameretta all'ospedale un blocco in cui annotava assiomi da discutere con gli amici che venivano a trovarlo.

Il Principio di Libera Costruzione

Nei primi tempi le discussioni del Seminario partivano da una base insiemistica tradizionale, ma le teorie insiemistiche correnti dovettero subire fin dall'inizio alcune sostanziali modifiche per adeguarsi almeno in parte ai criteri succitati: teorie insiemistiche sì, ma «all'antica», quindi:

– con *urelementi* (oggetti che non sono insiemi, per garantire non riduzionismo e apertura);

– con *grandi classi* che possono anche essere *elementi* (la classe universale *V*, quella degli insiemi *Ins*, i grafici delle proiezioni, ed altre classi utili per l'autodescrizione);

– senza *fondazione* (per consentire l'autoappartenenza, ed anche riflessività più complesse).

In questo periodo, comunque, la centralità delle nozioni insiemistiche era conservata; le esigenze di naturalezza e di flessibilità portarono quindi De Giorgi, che intendeva permettere alla relazione di appartenenza di modellare qualunque relazione, a formulare nel 1979 il suo «Principio di Libera Costruzione«:

PLC - è sempre possibile costruire un insieme d'insiemi assegnandone liberamente gli elementi mediante un'opportuna parametrizzazione.

Si tratta probabilmente del più importante contributo tecnico di De Giorgi alla Logica Matematica. Anche se assiomi formali corrispondenti ai casi principali del *PLC* erano stati considerati precedentemente da diversi autori negli anni '30 (Finsler) e '60 (Scott, Boffa, Hajek), la generalità e la naturalezza della sua formulazione hanno permesso analisi più approfondite e la determinazione di *Assiomi di Antifondazione* che sono ora considerati i più appropriati per le applicazioni della teoria degli insiemi alla Semantica e all'Informatica. Paradossalmente il *PLC* non compare in alcuna pubblicazione di De Giorgi, che, come usava fare per tutti gli sviluppi tecnici degli argomenti trattati nel Seminario, ne affidò lo studio ad allievi e colleghi [2].

[2] cfr. M. FORTI - F. HONSELL: *Set theory with free construction principles*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci. (4) **10** (1983), 493-522.

La Teoria Quadro e la Teoria Ampia

Nel frattempo De Giorgi andava sviluppando la sua concezione e giungeva ad un superamento decisivo del riduzionismo insiemistico richiedendo che gli urelementi non siano semplici *atomi privi di struttura*, ma permettano di recuperare con *naturalezza* molte nozioni tradizionali della matematica (*numeri naturali, operazioni, n-uple*, etc.). Se nella sua prima proposta pubblicata, [74], insiemi e classi sarebbero stati ancora sufficienti a codificare tutti gli altri oggetti considerati, già nella Teoria Quadro [80] l'uso di molte differenti specie di oggetti, non ridotti alle loro codifiche insiemistiche, risulta essenziale per presentare internamente le principali relazioni, operazioni e proprietà degli oggetti considerati dalla teoria stessa.

De Giorgi fornisce qui una prima soluzione al problema dell' *autoriferimento*: le classiche antinomie possono essere superate, anche se non completamente, proprio giocando sulle differenti tastiere fornite dalle varie specie di oggetti introdotti. Va tenuto conto, però, che se questa varietà permette in pratica di innestare singolarmente ogni oggetto voluto, non è detto che si possano introdurre *simultaneamente* tutti gli oggetti autoreferenziali desiderati. De Giorgi pone il problema in [82] ed i suoi sforzi verso una soluzione *generale* culminano nella Teoria Ampia del 1987, elaborata in collaborazione con Massimo Clavelli, Marco Forti e Vincenzo M. Tortorelli e pubblicata nel volume dedicato a Jacques-Louis Lions ([87]).

Nella Teoria Ampia sono presenti tutti i più importanti oggetti considerati in Matematica (*numeri naturali e cardinali, insiemi e classi, coppie e n-uple, operazioni*) ed alcuni fondamentali oggetti logici (*relazioni, proprietà o qualità, proposizioni*); gli assiomi postulati permettono una trattazione naturale delle usuali teorie matematiche ed una descrizione interna assai completa delle operazioni e relazioni considerate. Questa ricchezza pone ovviamente il problema della consistenza della teoria stessa: con un atteggiamento tipico delle sue ricerche fondazionali, De Giorgi non affronta mai direttamente tale problema, limitandosi ad analizzare le posibili antinomie, classiche o nuove, e sviluppando la teoria in modo da evitarle, trasformandole in teoremi limitativi. Naturalmente egli incitava allievi e colleghi ad un'indagine tecnica più approfondita, in modo da ottenere teorie formali la cui forza di consistenza fosse confrontabile con le consuete teorie insiemistiche, e di cui si potessero considerare modelli più o meno ricchi.

Nel caso della Teoria Ampia, il problema della consistenza fu studiato approfonditamente da un suo giovane allievo, Giacomo Lenzi. Risultò che la non comune capacità di analisi delle antinomie, che gli era propria, aveva consentito a De Giorgi di evitare l'inconsistenza. Tuttavia il suo desiderio di ottenere la massima comprensività lo aveva portato a rasentare l'abisso, sicché molte delle interessanti estensioni suggerite in [87], ed anche altre, ancor più naturali ed apparentemente innocue, risultarono inaspettatamente inconsistenti: il requisito dell'apertura era quindi violato.

Le Teorie Base

Questo contrasto tra l'ampiezza della teoria e la sua apertura ad estensioni portò De Giorgi ad un decisivo spostamento di obbiettivo: non più teorie *generali* di tutta la Matematica, ma *teorie-base*, con pochi oggetti ed assiomi meno impegnativi, sufficienti per fornire un quadro assiomatico leggero e flessibile, fortemente autodescrittivo ed aperto ad ogni tipo di innesto, non solo di nozioni matematiche, ma anche logiche e informatiche (e in prospettiva di concetti di ogni altra disciplina *sufficientemente chiara*).

Si pose quindi il problema di scegliere alcuni oggetti e concetti fondamentali, che grazie alle analisi precedenti furono specificati in *qualità, relazioni, collezioni* e *operazioni*, e di isolare pochi assiomi generali sufficienti per darne le proprietà essenziali. Dopo le prime proposte contenute in [101], [94], [99] e [123], le Teorie Base assunsero forma compiuta in [131].

Con la rinuncia a teorie onnicomprensive diveniva essenziale prevedere lavori specifici per innestare sulle teorie base le principali nozioni della Matematica e di altre discipline: De Giorgi si limitò a riconsiderare in [132] il concetto classico di *variabile* della Fisica Matematica e a trattare in [139] le nozioni logiche di *proposizione* e *predicato*, affrontando ivi per la prima volta la problematica nozione di *verità*.

Il programma di innestare sulle teorie base altri interessanti capitoli della Matematica, della Logica e dell'Informatica che richiedevano maggiori dettagli tecnici, venne affidato da De Giorgi ai suoi collaboratori, ai quali non fece mai mancare il suo contributo di discussioni, proposte ed elaborazioni personali. Ricordiamo qui, come esempi tipici di «teorie alla De Giorgi», da lui spesso citate nel Seminario, le due teorie generali per i concetti di *collezione, insieme* e *funzione* e per quello di *operazione* elaborate da Marco Forti e Furio Honsell sulla base dei suoi suggerimenti e delle discussioni comuni.

Le teorie del 2000

Nel frattempo le concezioni di De Giorgi, anche per la maggiore attenzione dimostrata verso le sue teorie da parte di scienziati applicati (fisici, biologi, economisti) piuttosto che da matematici e logici, evolvevano nella direzione di svincolare le proposte fondazionali dalle originali teorie matematiche, per farne autentiche basi generali *interdisciplinari* (cfr. [123], [126] e [127]): ne è chiaro segno il fatto che i numeri naturali perdono la centralità che avevano conservato in tutte le teorie precedenti, mentre proposizioni e predicati assumono un ruolo essenziale per l'autodescrizione, e la nozione di *verità* balza in primo piano. Come concetti fondamentali indefiniti rimangono soltanto quelli di *qualità* e *relazione*: ovviamente non nel senso riduzionista che ogni altra nozione si scompone alla fine in qualità e relazioni, ma semplicemente postulando che tutti gli altri concetti fondamentali considerati (collezioni, operazioni, proposizioni, predicati, ecc.) sono introdotti, qualificati e governati da opportune relazioni e qualità fondamentali.

Questo nuovo approccio, anticipato da [149] e [141], era appena agli inizi nel 1996, ma De Giorgi vi si era lanciato con grande entusiasmo e teorie estremamente interessanti avrebbero potuto maturare (anche prima del nuovo millennio, cui egli amava scherzosamente assegnarle), se la sorte non ne avesse troncato prematuramente la vita e l'attività nell'ottobre di quell'anno. Restano, come suggerimenti da sviluppare, i lavori [147], [143] e [144], che peraltro erano già stati superati da De Giorgi nel suo impetuoso percorrere il nuovo filone di ricerca: in particolare gli sviluppi dei calcoli logici (semantici e non formali) ed il recupero della nozione interna di verità (assoluta) come qualità di alcune proposizioni, con la corrispondente trasformazione della classica Antinomia del Mentitore, così congeniali alle idee generali di De Giorgi, sono ricchi di interessanti problemi e suggerimenti per ulteriori approfondimenti. Un'eco delle idee discusse da De Giorgi nell'ultimo periodo si può trovare in una nota di Marco Forti e Giacomo Lenzi (3), che sistematizza e sviluppa proprio queste ultime proposte.

L. AMBROSIO, G. DAL MASO, M. FORTI, M. MIRANDA, S. SPAGNOLO

(3) *A General Axiomatic Framework for the Foundations of Mathematics, Logic and Computer Science*, Rend. Acc. Naz. Sci. XL, Mem. Mat. Appl. (5), **21** (1997), 171-207.

PUBBLICAZIONI

1950

[1] *Costruzione di un elemento di compattezza per una successione di un certo spazio metrico*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8), **8**, 302-304.
[2] *Un criterio generale di compattezza per lo spazio delle successioni*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8), **9**, 238-242.

1952

[3] *Ricerca dell'estremo di un cosiddetto funzionale quadratico*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8), **12**, 256-260.
[4] *Sulla sommabilità delle funzioni assolutamente integrabili*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8), **12**, 507-510.
[5] *Compiuta ricerca dell'estremo inferiore di un particolare funzionale*, Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli (4), **19**, 29-41.

1953

[6] *Un nuovo teorema di esistenza relativo ad alcuni problemi variazionali*, Pubbl. IAC N. 371, CNR, Roma.
[7] *Definizione ed espressione analitica del perimetro di un insieme*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8), **14**, 390-393.
[8] *Un teorema sulle serie di polinomi omogenei*, Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., **87**, 185-192.
[9] *Osservazioni relative ai teoremi di unicità per le equazioni differenziali a derivate parziali di tipo ellittico, con condizioni al contorno di tipo misto*, Ricerche Mat., **2**, 183-191.

1954

[10] *Su una teoria generale della misura $(r-1)$-dimensionale in uno spazio ad r dimensioni*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **36**, 191-213.
[11] *Lições sobre uma teoria das equações integrais lineares e suas aplicações segundo a orientação de Jordan-Hilbert* (con M. Picone), Traduzio por Dante A. O. Martinelli. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

1955

[12] *Un teorema di unicità per il problema di Cauchy, relativo ad equazioni differenziali lineari a derivate parziali di tipo parabolico*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **40**, 371-377.
[13] *Un esempio di non unicità della soluzione di un problema di Cauchy, relativo ad un'equazione differenziale lineare di tipo parabolico*, Rend. Mat. e Appl. (5), **14**, 382-387.
[14] *Nuovi teoremi relativi alle misure $(r-1)$-dimensionali in uno spazio ad r dimensioni*, Ricerche Mat., **4**, 95-113.

1956

[15] *Alcune applicazioni al calcolo delle variazioni di una teoria della misura k-dimensionale*, Atti V Congresso U.M.I. (Pavia-Torino, 1955), Cremonese, Roma.
[16] *Sull'analiticità delle estremali degli integrali multipli*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8), **20**, 438-441.

1957

[17] *Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari*, Mem. Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (3), **3**, 25-43.

1958

[18] *Sulla proprietà isoperimetrica dell'ipersfera, nella classe degli insiemi aventi frontiera orientata di misura finita*, Atti Accad. Naz. Lincei Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Sez. I (8), **5**, 33-44.

1959

[20] *Considerazioni sul problema di Cauchy per equazioni differenziali di tipo parabolico di ordine qualunque*, Symposium on the *Numerical Treatment of Partial Differential Equations with Real Characteristic* (Roma, 1959), 136-139, Veschi, Roma.

1961

[21] *Complementi alla teoria della misura* $(n-1)$*-dimensionale in uno spazio n-dimensionale*, Seminario di Matematica della Scuola Normale Superiore di Pisa, 1960-61, Editrice Tecnico Scientifica, Pisa.

[22] *Frontiere orientate di misura minima*, Seminario di Matematica della Scuola Normale Superiore di Pisa, 1960-61, Editrice Tecnico Scientifica, Pisa.

1965

[23] *Una estensione del teorema di Bernstein*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **19**, 79-85.

[24] *Sulle singolarità eliminabili delle ipersuperficie minimali* (con G. Stampacchia), Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8), **38**, 352-357.

1966

[25] *Sulle singolarità eliminabili delle ipersuperficie minimali*, Atti del Convegno sulle Equazioni alle Derivate Parziali (Nervi, 1965), 55-58, Cremonese, Roma.

1968

[26] *Hypersurfaces of minimal measure in pluridimensional euclidean spaces*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Moscow, 1966), 395-401, Mir, Moscow.

[27] *Maggiorazioni a priori relative ad ipersuperfici minimali*, Atti del Convegno di Analisi Funzionale (Roma, 1968), 283-285, INdAM, Symposia Mathematica II.

[28] *Un esempio di estremali discontinue per un problema variazionale di tipo ellittico*, Boll. Un. Mat. Ital. (4), **1**, 135-137.

[29] *Corso di Analisi per Chimici*, Università di Pisa, 1967-68 (ristampa ed. DE SALVIO, Ferrara, 1969).

1969

[30] *Minimal cones and the Bernstein problem* (con E. Bombieri e E. Giusti), Invent. Math., **7**, 243-268.

[31] *Una maggiorazione a priori per le ipersuperfici minimali non parametriche* (con E. Bombieri e M. Miranda), Arch. Rational Mech. Anal., **32**, 255-267.

[32] *Teoremi di semicontinuità nel calcolo delle variazioni*, Lezioni tenute all'Istituto Nazionale di Alta Matematica, Roma, 1968-69; appunti redatti da U. MOSCO, G. TROIANIELLO, G. VERGARA.

1971

[33] *Una formula di rappresentazione per funzioni analitiche in* $\boldsymbol{R}^n$ (con L. Cattabriga), Boll. Un. Mat. Ital. (4), **4**, 1010-1014.

[34] *Una dimostrazione diretta dell'esistenza di soluzioni analitiche nel piano reale di equazioni a derivate parziali a coefficienti costanti* (con L. Cattabriga), Boll. Un. Mat. Ital. (4), **4**, 1015-1027.

1972

[35] *Sur l'existence de solutions analitiques d'équations à coefficients constants*, Actes du Colloque d'Analyse Fonctionnelle (Bordeaux, 1971), 133-135, Bull. Soc. Math. France, Mém. no. **31-32**, Paris.

[36] *Solutions analitiques des équations aux derivées partielles à coefficients constants*, Séminaire Goulaouic-Schwartz 1971-72: Équations aux Dérivées Partielles et Analyse Fonctionnelle, Exp. no. 29, École Polytechnique, Centre de Math., Paris.

[37] *Sull'esistenza di soluzioni analitiche di equazioni a derivate parziali a coefficienti costanti in un qualunque numero di variabili* (con L. Cattabriga), Boll. Un. Mat. Ital. (4), **6**, 301-311.

[38] *Frontiere orientate di misura minima e questioni collegate* (con F. Colombini e L. C. Piccinini), Quaderni della Scuola Normale Superiore di Pisa, Editrice Tecnico Scientifica, Pisa.

1973

[39] *Problemi di superfici minime con ostacoli: forma non cartesiana*, Boll. Un. Mat. Ital. (4), 8, 80-88.

[40] *Sulla convergenza degli integrali dell'energia per operatori ellittici del secondo ordine* (con S. Spagnolo), Boll. Un. Mat. Ital. (4), **8**, 391-411.

1974

[41] *Introduction to minimal surface theory, Global Analysis and its Applications*, Lectures Internat. Sem. Course (ICTP, Trieste, 1972), Vol. II, 43-45, Internat. Atomic Energy Agency, Vienna.

1975

[42] *Sulle soluzioni globali di alcuni sistemi di equazioni differenziali*, Collection of articles dedicated to Giovanni Sansone on the occasion of his 85th birthday, Boll. Un. Mat. Ital. (4), **11**, 77-79.

[43] *Sulla convergenza di alcune successioni d'integrali del tipo dell'area*, Collection of articles dedicated to Mauro Picone on the occasion of his 90th birthday, Rend. Mat. (6), **8**, 277-294.

[44] *Soluzioni di equazioni differenziali a coefficienti costanti appartenenti in un semispazio a certe classi di Gévrey* (con L. Cattabriga), Collection in memory of Enrico Bompiani, Boll. Un. Mat. Ital. (4), suppl., **12**, 324-348.

[45] *Su un tipo di convergenza variazionale* (con T. Franzoni), Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8), **58**, 842-850.

1976

[46] *Convergenza in energia di operatori ellittici*, Conferenza tenuta nel febbraio 1974. Contributi del Centro Linceo Interdisciplinare di Scienze Matematiche e loro Applicazioni, 16.

1977

[47] *Γ-convergenza e G-convergenza*, Boll. Un. Mat. Ital. (5), **14-A**, 213-220.

[48] *Une notion générale de convergence faible pour des fonctions croissantes d'ensemble* (con G. Letta), Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), **4**, 61-99.

1978

[49] *Existence et unicité des solutions des équations hyperboliques du second ordre à coefficients ne dépendant que du temps* (con F. Colombini e S. Spagnolo), C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A, **286**, 1045-1048.

1979

[50] *Sur les équations hyperboliques avec des coefficients qui ne dépendent que du temps* (con F. Colombini e S. Spagnolo), Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), **6**, 511-559.
[51] *Convergence problems for functionals and operators*, Proc. of the Internat. Meeting on *«Recent Methods in Nonlinear Analysis»* (Roma, 1978), E. De Giorgi, E. Magenes, U. Mosco (eds.), 131-188, Pitagora, Bologna.
[52] *Su un tipo di convergenza variazionale* (con T. Franzoni), Rend. Sem. Mat. Brescia, **3**, 63-101.
[53] *Γ-convergenza e superfici minime* (con L. Modica), Preprint Scuola Normale Superiore, Pisa.

1980

[54] *Quelques problèmes de Γ-convergence, Computing Methods in Applied Sciences and Engineering*, IV Internat. Symposium (Versailles, 1979), R. Glowinski and J. L. Lions (eds.), 637-643, North Holland, Amsterdam.
[55] *New problems in Γ-convergence and G-convergence, Free Boundary Problems* (Pavia, 1979), Vol. II, 183-194, Istituto Nazionale di Alta Matematica, Roma.
[56] *Guido Stampacchia*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8), **68**, 619-625.
[57] *Γ-limiti di ostacoli* (con G. Dal Maso e P. Longo), Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8), **68**, 481-487.
[58] *Problemi di evoluzione in spazi metrici e curve di massima pendenza* (con A. Marino e M. Tosques), Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8), **68**, 180-187.

1981

[59] *Γ-limiti di ostacoli*, *Recent Methods in Nonlinear Analysis and Applications*, SAFA IV (Napoli, 1980), A. Canfora, S. Rionero, C. Sbordone, G. Trombetti (eds.), 51-84, Liguori, Napoli.
[60] *Generalized limits in calculus of variations, Topics in Functional Analysis 1980-81*, 117-148, Quaderni della Scuola Normale Superiore, Editrice Tecnico Scientifica, Pisa.
[61] *Limits of functionals and differential operators, Analytic Solutions of Partial Differential Equations* (Trento, 1981), L. Cattabriga (ed.), 153-161, Astérisque 89-90, Soc. Math. France, Paris.
[62] *Limiti generalizzati e loro applicazioni alle equazioni differenziali* (con G. Buttazzo), Matematiche (Catania), **36**, 53-64.

1982

[63] *Operatori elementari di limite ed applicazioni al calcolo delle variazioni*, Atti del Convegno su *«Studio di Problemi-Limite in Analisi Funzionale»* (Bressanone, 1981), 101-116, Pitagora, Bologna.
[64] *Alcune osservazioni sui rapporti tra matematica pura e matematica applicata*, Atti del VI convegno AMASES (Marina di Campo, Isola d'Elba, 1982).
[65] *Nuovi risultati sulla convergenza dei funzionali*, Proc. Internat. Conference on Partial Differential Equations dedicated to Luigi Amerio on his 70th birthday (Milano-Como, 1982), Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, **52**, 167-173.
[66] *Una presentazione sintetica dei limiti generalizzati* (con T. Franzoni), Portugal. Math., **41**, 405-436.
[67] *Funzioni (p, q)-convesse* (con A. Marino e M. Tosques), Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8), **73**, 6-14.

1983

[68] *Γ-convergence and calculus of variations* (con G. Dal Maso), *Mathematical Theories of Optimization* (S. Margherita Ligure, 1981), T. Zolezzi (ed.), 121-143, Lecture Notes in Math. 979, Springer-Verlag, Berlin.

[69] *Recenti sviluppi della Γ-convergenza in problemi ellittici, parabolici ed iperbolici* (con M. Degiovanni e M. Tosques), *Methods of Functional Analysis and Theory of Elliptic Equations* (Napoli, 1982), 103-114, Liguori, Napoli.
[70] *On the lower semicontinuity of certain integral functionals* (con G. Buttazzo e G. Dal Maso), Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8), **74**, 274-282.
[71] *Evolution equations for a class of nonlinear operators* (con M. Degiovanni, A. Marino e M. Tosques), Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8), **75**, 1-8.

1984

[72] *On a definition of Γ-convergence of measures, Multifunctions and Integrands* (Catania, 1983), G. SALINETTI (ed.), 150-159, Lectures Notes in Math. 1091, Springer-Verlag, Berlin.
[73] *G-operators and Γ-convergence*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Warsaw, 1983), Vol. 2, 1175-1191, PWN, Warsaw, and North-Holland, Amsterdam.
[74] *Premessa a nuove teorie assiomatiche dei Fondamenti della Matematica* (con M. Forti), Quaderni del Dipartimento di Matematica 45, Pisa.

1985

[75] *Some semi-continuity and relaxation problems*, *Ennio De Giorgi Colloquium* (Paris, 1983), P. KRÉE (ed.), 1-11, Res. Notes in Math. 125, Pitman, London.
[76] *References, Ennio De Giorgi Colloquium* (Paris, 1983), P. KRÉE (ed.), 191-196, Res. Notes in Math. 125, Pitman, London.
[77] *Su alcuni nuovi risultati di minimalità*, Atti del Convegno Celebrativo del I Centenario del Circolo Matematico di Palermo (Palermo, 1984), Rend. Circ. Mat. Palermo (2), suppl., 8, 71-106.
[78] *Convergenza debole di misure su spazi di funzioni semicontinue* (con G. Dal Maso e L. Modica), Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8), **79**, 98-106.
[79] *Nuovi sviluppi del calcolo delle variazioni*, *Metodi di Analisi Reale nelle Equazioni alle Derivate Parziali* (Cagliari, 1985), O. MONTALDO, A. PIRO, F. RAGNEDDA (eds.), 83-91, Dipartimento di Matematica, Cagliari.
[80] *Una teoria quadro per i Fondamenti della Matematica* (con M. Forti), Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8), **79**, 55-67.

1986

[81] *Su alcuni indirizzi di ricerca nel calcolo delle variazioni*, Convegno celebrativo del centenario della nascita di Mauro Picone e di Leonida Tonelli (Roma, 1985), 183-187, Atti dei Convegni Lincei 77.
[82] *Sul problema dell'autoriferimento* (con M. Forti e V.M. Tortorelli), Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8), **80**, 363-372.

1987

[83] *Some open problems in the theory of partial differential equations, Hyperbolic Equations* (Padova, 1985), F. COLOMBINI and M. K. V. MURTHY (eds.), 67-73, Pitman Res. Notes Math. Ser. 158, Longman, Harlow.
[84] *Weak convergence of measures on spaces of lower semicontinuous functions* (con G. Dal Maso e L. Modica), *Proc. of the Internat. Workshop on Integral Functionals in Calculus of Variations* (Trieste, 1985), Rend. Circ. Mat. Palermo (2), suppl., **15**, 59-100.
[85] *Integral representation and relaxation for functionals defined on measures* (con L. Ambrosio e G. Buttazzo), Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8), **81**, 7-13.

1988

[86] *Un nuovo tipo di funzionale del calcolo delle variazioni* (con L. Ambrosio), Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8), **82**, 199-210.

[87] *A self-reference oriented theory for the foundations of mathematics* (con M. Clavelli, M. Forti e V.M. Tortorelli), *Analyse Mathématique et Applications*, Contributions en l'honneur del Jacques-Louis Lions, 67-115, Gauthier-Villars, Paris.

[88] *Problemi di regolarità per un nuovo tipo di funzionale del calcolo delle variazioni* (con G. Congedo e I. Tamanini), Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8), **82**, 673-678.

1989

[89] *New functionals in calculus of variations, Nonsmooth Optimization and Related Topics*, Proc. of the Fourth Course of the International School of Mathematics (Erice, 1988), F. H. Clarke, V. F. Dem'yanov, F. Giannessi (eds.), 49-59, Ettore Majorana Internat. Sci. Ser. Phys. Sci. 43, Plenum Press, New York.

[90] *Su alcuni problemi comuni all'analisi e alla geometria*, Giornate di Studio su Geometria Differenziale e Topologia (Lecce, 1989), Note Mat., suppl., **9**, 59-71.

[91] *Sviluppi dell'analisi funzionale nel Novecento, Il Pensiero Matematico del XX Secolo e l'Opera di Renato Caccioppoli*, 41-59, Istituto Italiano per gli Studi Filosofici, Seminari di Scienze 5, Napoli.

[92] *Introduzione ai problemi di discontinuità libera, Symmetry in Nature*, A volume in honour of Luigi A. Radicati di Brozolo, I, 265-285, Scuola Normale Superiore, Pisa.

[93] *Existence theorem for a minimum problem with free discontinuity set* (con M. Carriero e A. Leaci), Arch. Rational Mech. Anal., **108**, 195-218.

1990

[94] *Una conversazione su: Fondamenti della Matematica e «Teoria base». L'esempio della teoria «7×2»*, Seminari di Didattica 1988-89, 56-62, Quaderni del Dipartimento di Matematica dell'Università di Lecce 3.

[95] *Conversazioni di Matematica – Anni accademici 1988/90*, Quaderni del Dipartimento di Matematica dell'Università di Lecce 2.

[96] *Definizioni e congetture del giorno 2 maggio 1990*, Dattiloscritto, Pisa.

[97] *Free discontinuity problems in calculus of variations*, Proc. Israel Mathematical Union Annual Congress 1990.

[98] *Some conjectures on flow by mean curvature, Methods of Real Analysis and Partial Differential Equations* (Capri, 1990), M. L. Benevento, T. Bruno, C. Sbordone (eds.), 9-16, Liguori, Napoli (ristampa in Quaderni dell'Accademia Pontaniana 14, Napoli, 1992).

[99] «5×7»: *a basic theory for the foundations of mathematics* (con M. Forti), Preprint Scuola Normale Superiore 74, Pisa.

[100] *Alcune congetture riguardanti l'evoluzione delle superfici secondo la curvatura media*, Dattiloscritto, 1990-91.

1991

[101] *Qualche riflessione sui rapporti tra matematica ed altri rami del sapere*, Convegno Internazionale «Conoscenza e Matematica» (Pavia, 1989), Lorenzo Magnani ed., 241-249, Marcos y Marcos, Milano.

[102] *Problemi con discontinuità libera*, Int. Symp. «Renato Caccioppoli» (Napoli, 1989), Ricerche Mat., suppl., **40**, 203-214.

[103] *Alcuni problemi variazionali della geometria, Recent Developments in Mathematical Analysis and its Applications* (Bari, 1990), 113-125, Confer. Sem. Mat. Univ. Bari, 237-244.

[104] *Some remarks on Γ-convergence and least squares method, Composite Media and Homogeneization Theory* (ICTP, Trieste, 1990), G. Dal Maso and G.F. Dell'Antonio (eds.), 135-142, Birkhäuser, Boston.

[105] *Riflessioni su alcuni problemi variazionali*, Dattiloscritto del testo della conferenza al convegno Equazioni Differenziali e Calcolo delle Variazioni (Pisa, 1991).

[106] *Free discontinuity problems in calculus of variations*, *Frontiers in Pure and Applied Mathemathics*, a collection of papers dedicated to J. L. Lions on the occasion of his 60th birthday, R. DAUTRAY (ed.), 55-62, North Holland, Amsterdam.

[107] *Varietà poliedrali di tipo Sobolev*, Dattiloscritto del testo della conferenza al Meeting on Calculus of Variations and Nonlinear Elasticity (Cortona, 1991).

[108] *Congetture sui limiti delle soluzioni di alcune equazioni paraboliche quasi lineari*, *Nonlinear Analysis*, A Tribute in Honour of Giovanni Prodi, 173-187, Quaderni della Scuola Normale Superiore, Pisa.

1992

[109] *Conjectures on limits of some quasilinear parabolic equations and flow by mean curvature*, *Partial Differential Equations and Related Subjects*, Proceedings of a Conference dedicated to L. Nirenberg (Trento, 1990), M. MIRANDA (ed.), 85-95, Pitman Res. Notes in Math. Ser. 269, Longman, Harlow.

[110] *Problemi variazionali con discontinuità libere*, Convegno Internazionale in Memoria di Vito Volterra (Roma, 1990), 133-150, Atti dei Convegni Lincei 92.

[111] *On the relaxation of functionals defined on cartesian manifolds*, *Developments in Partial Differential Equations and Applications to Mathematical Physics* (Ferrara, 1991), G. BUTTAZZO, G. P. GALDI, L. ZANGHIRATI (eds.), 33-38, Plenum Press, New York.

[112] *Movimenti minimizzanti*, *Aspetti e Problemi della Matematica Oggi* (Lecce, 1992), Dipartimento di Matematica, Univ. Lecce.

[113] *Un progetto di teoria unitaria delle correnti, forme differenziali, varietà ambientate in spazi metrici, funzioni a variazione limitata*, Dattiloscritto, 1992-1993.

[114] *Funzionali del tipo di integrali di Weierstrass – Osservazioni di Ennio De Giorgi su alcune idee di De Cecco e Palmieri*, Dattiloscritto.

1993

[115] *Movimenti secondo la variazione*, *Problemi Attuali dell'Analisi e della Fisica Matematica*, Simposio internazionale in onore di G. Fichera per il suo 70º compleanno (Taormina, 1992), P. E. RICCI (ed.), 65-70, Dipartimento di Matematica, Università «La Sapienza», Roma.

[116] *New problems on minimizing movements*, *Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications*, in honour of E. Magenes on the occasion of his 70th birthday, C. BAIOCCHI and J. L. LIONS (eds.), 81-98, Masson, Paris.

[117] *Congetture riguardanti barriere, superfici minime, movimenti secondo la curvatura*, Dattiloscritto, Lecce, 4 novembre 1993.

[118] *Congetture riguardanti barriere e sopramovimenti secondo la curvatura media*, Dattiloscritto, Pisa, 26 novembre 1993.

[119] *Recenti sviluppi nel calcolo delle variazioni*, Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari, **63** (1993), 47-56.

[120] *Complementi ad alcune congetture riguardanti le barriere*, Dattiloscritto.

1994

[121] *Il valore sapienziale della matematica*, *Lectio magistralis*, Conferimento Laurea «Honoris Causa» in Filosofia a Ennio De Giorgi (Lecce, 1992), 19-28, Univ. Lecce, Fac. Lettere e Filosofia, Adriatica Editrice Salentina, Lecce.

[122] *New ideas in calculus of variations and geometric measure theory*, *Motion by Mean Curvature and Related Topics* (Trento, 1992), G. BUTTAZZO and A. VISINTIN (eds.), 63-69, de Gruyter, Berlin.

[123] *Sugli assiomi fondamentali della matematica*, Conferenza, Napoli, 3 marzo 1994.

[124] *Barriers, boundaries, motion of manifolds*, Conferenza al Dipartimento di Matematica dell'Università di Pavia, 18 marzo 1994.

[125] *Barriere, frontiere, movimenti di varietà*, Dattiloscritto, Pavia, 19 e 26 marzo 1994.

[126] *Fundamental Principles of Mathematics*, Relazione alla Sessione Plenaria della Pontificia Accademia delle Scienze, 25-29 ottobre 1994.

[127] *Complementi tecnici alla relazione di Ennio De Giorgi*, Accademia Pontificia delle Scienze, 28 Ottobre 1994, Dattiloscritto.

[128] *Soluzioni di equazioni paraboliche convergenti verso movimenti di partizioni, Convergence Theory* (Dijon, 1994).

[129] *On the convergence of solutions of some evolution differential equations*, Set-Valued Anal., **2**, 175-182.

[130] *Un progetto di teoria delle correnti, forme differenziali e varietà non orientate in spazi metrici, Variational Methods, Nonlinear Analysis and Differential Equations*, in honour of J. P. Cecconi (Genova, 1993), M. Chicco, P. Oppezzi, T. Zolezzi (eds.), 67-71, *ECIG, Genova.*

[131] *Una proposta di teorie base dei Fondamenti della Matematica* (con M. Forti e G. Lenzi), Atti Accad. Naz Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl., **5**, 13-22.

[132] *Introduzione delle variabili nel quadro delle teorie base dei Fondamenti della Matematica* (con M. Forti e G. Lenzi), Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl., **5**, 117-128.

1995

[133] *New conjectures on flow by mean curvature, Nonlinear Variational Problems and Partial Differential Equations* (Isola d'Elba, 1990), A. Marino and M. K. V. Murthy (eds.), 120-128, Pitman Res. Notes in Math. Ser. 320, Longman, Harlow.

[134] *Su alcune generalizzazioni della nozione di perimetro, Equazioni Differenziali e Calcolo delle Variazioni* (Pisa, 1992), G. Buttazzo, A. Marino, M. V. K. Murthy (eds.), 237-250, Quaderni U.M.I. 39, Pitagora, Bologna.

[135] *Problema di Plateau generale e funzionali geodetici, Nonlinear Analysis – Calculus of Variations* (Perugia, 1993), Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, **43**, 285-292.

[136] *Congetture sulla continuità delle soluzioni di equazioni lineari ellittiche autoaggiunte a coefficienti illimitati*, Dattiloscritto, Lecce, 4 gennaio 1995.

[137] *Congetture nel calcolo delle variazioni*, Dattiloscritto, Pisa, 19 gennaio 1995.

[138] *Riflessioni su matematica e sapienza*, Quaderni dell'Accademia Pontaniana 18, Napoli.

[139] *Calcolo dei predicati e concetti metateorici in una teoria base dei Fondamenti della Matematica* (con M. Forti, G. Lenzi e V. M. Tortorelli), Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl., **6**, 79-92.

1996

[140] *Movimenti di partizioni, Variational Methods for Discontinuous Structures* (Como, 1994), R. Serapioni and F. Tomarelli (eds.), 1-5, Birkhäuser, Basel.

[141] *La teoria '95. Una proposta di teoria aperta e non riduzionistica dei fondamenti della matematica* (con G. Lenzi), Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl. (5), **20**, 7-34.

[142] *Congetture riguardanti alcuni problemi di evoluzione*, a celebration of J. F. Nash Jr., Duke Math. J., **81**, 255-268.

[143] *Verso i sistemi assiomatici del 2000 in Matematica, Logica e Informatica* (con M. Forti e G. Lenzi), Preprint Scuola Normale Superiore, Pisa.

[144] *Verità e giudizi in una nuova prospettiva assiomatica* (con M. Forti e G. Lenzi), *Con-tratto, rivista di filosofia tomista e filosofia contemporanea*, volume «*Il fare della Scienza: i fondamenti e le palafitte*», a cura di F. Barone, G. Basti, A. Testi, 233-252.

[145] *L'analisi matematica standard e non standard rivista in una nuova prospettiva scientifica e culturale*, Dattiloscritto, Lecce, giugno 1996.

Opere postume

[146] *Su alcuni problemi instabili legati alla teoria della visione*, Atti del convegno in onore di Carlo Ciliberto (Napoli, 1995), T. BRUNO, P. BUONOCORE, L. CARBONE, V. ESPOSITO (eds.), 91-98, La Città del Sole, Napoli, 1997.

[147] *Dalla matematica e dalla logica alla sapienza* (con M. Forti). *Pensiero Scientifico, Fondamenti ed Epistemologia* (Ancona, 1996), a cura di A. REPOLA BOATTO, 17-36, Quaderni di «Innovazione Scuola», 29, Ancona 1997.

[148] *Calcolo delle variazioni* (con G. Buttazzo e G. Dal Maso), Enciclopedia del Novecento, Istituto della Enciclopedia Italiana, Roma [di prossima pubblicazione].

[149] *Dal superamento del riduzionismo insiemistico alla ricerca di una più ampia e profonda comprensione tra matematici e studiosi di altre discipline scientifiche e umanistiche*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9), Mat. Appl., 9, 71-80 (1998).