Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Walter Inglese

Proprietà asintotiche delle equazioni di Maxwell nello spazio-tempo di Schwarzschild

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1S, p. 101–104.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_101_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. III-A, Supplemento ad Aprile 2000, 101-104

Proprietà asintotiche delle equazioni di Maxwell nello spazio-tempo di Schwarzschild.

WALTER INGLESE

Nel nostro lavoro abbiamo ottenuto una stima del comportamento asintotico delle soluzioni delle equazioni di Maxwell nel vuoto, nello spazio-tempo di Schwarzschild esterno $S_E = \{r > 2m\}$ (1).

Per ottenere tale risultato abbiamo seguito – e sviluppato, adattandola alla nostra situazione – la procedura introdotta, verso la fine degli anni '80, da D. Christodoulou e S. Klainerman per dimostrare l'esistenza globale della soluzione delle equazioni di Einstein nel vuoto per dati iniziali «piccoli» (vedi [1], [2], [3] e [4]), tramite la quale è stato possibile anche determinare le proprietà asintotiche delle soluzioni delle equazioni di Bianchi per un tensore di Weyl e delle equazioni di Maxwell nel vuoto (e anche dell'equazione d'onda scalare), nello spazio-tempo di Minkowski (vedi [1], [2] e [3]).

Infatti, utilizzando una generalizzazione delle classiche diseguaglianze di Sobolev, si trova che si possono stimare le norme L^2 delle componenti del tensore di Weyl o di un campo elettromagnetico tramite delle opportune energie generalizzate. Essendo queste ultime conservate – l'alta simmetria dello spazio di Minkowski è all'origine di questa conservazione –, otteniamo una stima del comportamento asintotico delle componenti dei tensori che risolvono le equazioni (e delle derivate) tramite energie generalizzate calcolate sui dati iniziali, cioè si stimano le soluzioni senza mai dover utilizzare la forma esplicita né la soluzione fondamentale.

L'eleganza del metodo e la sua efficacia ci hanno indotti a considerare la possibilità di estenderlo allo spazio-tempo di Schwarzschild, pur sapendo che molte delle simmetrie presenti nello spazio-tempo di Minkowski si perdono in quello di Schwarzschild (che è statico e sfericamente simmetrico ma è privo di simmetrie conformi). Tuttavia, grazie alla definizione della nozione di pseudo-conformità, siamo riusciti a recuperarle, almeno in parte.

Infatti, se le equazioni di campo risultano invarianti nello spazio-tempo di Minkowski per un vasto gruppo di trasformazioni (quelle del gruppo conforme), le equazioni risultano quasi-invarianti per un altrettanto vasto gruppo di trasformazioni (che diremo pseudo-conformi) nello spazio-tempo di Schwarzschild.

L'invarianza delle equazioni determina di fatto la conservazione di molte

(1) m è la massa della distribuzione sferica di materia che produce il campo gravitazionale e che supponiamo contenuta nella regione interna $r \leqslant 2m$; le unità usate sono tali che $c = G = 1$.

energie generalizzate nello spazio-tempo di Minkowski, mentre la quasi-invarianza dà la possibilità di controllare delle opportune energie generalizzate tramite le stesse energie generalizzate calcolate sul dato iniziale (si ha cioè una quasi-conservazione).

Prima di enunciare un teorema che raccolga i risultati ottenuti, specifichiamo alcune nozioni utilizzate:

1. – Pseudo-conformità.

Un campo di vettori X si dice *di Killing* se $L_X g = 0$, essendo $L_X g$ la derivata di Lie di g rispetto al campo X. Un campo X si dice *Killing conforme* se $L_X g = \lambda_{(X)} g$, con λ funzione regolare sulla varietà, caratteristica per X.

Un campo X si dice *Killing pseudo-conforme* se

$$^{(X)}\widehat{\pi}_{\alpha\beta} = \mu_{(X)} \operatorname{sgn}(\alpha)\, g_{\alpha\beta}$$

dove $L_X g_{\alpha\beta} \equiv {}^{(X)}\pi_{\alpha\beta}$ e $^{(X)}\widehat{\pi}$ è $^{(X)}\pi$ privato della traccia; inoltre

$$\operatorname{sgn}(\alpha) = \begin{cases} +1, & \text{se } \alpha = 0,\, r \\ -1, & \text{se } \alpha = \theta,\, \phi \end{cases}$$

e $\mu_{(X)}$ è una funzione regolare (non necessariamente definita in segno).

2. – Energie generalizzate: conservazione e quasi conservazione.

L'energia del campo F al tempo t è data da $\int_{\Sigma_t} Q(F)(\partial_t, \partial_t)$ dove Σ_t è un'ipersuperficie $\{t = \text{cost.},\, r > 2m\}$ e $Q(F)$ è il tensore energia-impulso relativo ad F.

Nelle diseguaglianze tipo-Sobolev che si usano in [1], [2], [3], e [4], le norme L^2 delle componenti di F sono controllate tramite delle norme integrali delle derivate delle componenti stesse. Perciò si definiscono le *energie generalizzate*

$$I_t = \int_{\Sigma_t} Q(L_{X_1} \dots L_{X_h} F)(Y, \partial_t) \tag{1}$$

dove $Q(L_{X_1} \dots L_{X_h} F)$ è il tensore energia-impulso associato al campo $L_{X_1} \dots L_{X_h} F$ che generalizza il tensore energia-impulso $Q(F)$; Y e ∂_t sono dei campi di vettori non spaziali e Y deve essere anche diretto verso il futuro; in tal caso infatti $Q(F)(Y, \partial_t)$ risulta semidefinito positivo e non degenere e pertanto le energie generalizzate si possono usare come norme integrali di $L_{X_1} \dots L_{X_h} F$.

Nel caso minkowskiano le energie generalizzate sono conservate (più precisamente, si dimostra in [3] che, se X_i ed Y sono di Killing o Killing conformi, le energie generalizzate I_t sono controllate da I_0 che si suppone finita, cioè $I_t \leqslant c I_0$).

Nel nostro caso si ha invece $I_t \leqslant c(m, r_0) I_0$ dove, anzitutto, I_t è calcolata su coni luce e non su Σ_t; inoltre la stima non è uniforme (ciò essendo dovuto al fatto che i campi X_i ed Y possono essere anche «solo» Killing pseudo-conformi). Vi è infatti una dipendenza della c da r_0 che è il valore del raggio della sfera $S(0, r_0) = \Sigma_0 \cap C$, dove C è il cono-luce uscente su cui è calcolata la energia generalizzata I_t (mentre la I_0 è calcolata su Σ_0).

3. – Diseguaglianze tipo-Sobolev.

Da alcune diseguaglianze di Sobolev rielaborate da Christodoulou e Klainerman (vedi [1], [2] e [3]), utilizzando le equazioni di Maxwell e le proprietà di $Q(L_{X_1} \ldots L_{X_h} F)$, si ottengono delle stime per le componenti nulle U, del tipo

$$|U(t, r)| \leqslant c_0 r^{-q} \tau_-^{-n} I_t^{1/2}$$

dove c_0 è un numero puro, U è una componente di F, $\tau_\pm^2 \equiv 1 + (t \pm r_*)^2$, $r_* = r + 2m \log\left(\dfrac{r}{2m} - 1\right)$, q ed n sono interi o semi-interi positivi o nulli, I_t è un'opportuna energia generalizzata del tipo (1) in cui i campi $X_1 \ldots X_h$ ed Y sono vettori di Killing o pseudo-conformi.

A questo punto possiamo enunciare il

TEOREMA 1. – *Sia F una 2-forma che risolve le equazioni di Maxwell nel vuoto e si introduca in ogni punto di $\mathcal{S}_E$ il riferimento ortogonale adattato ai coni-luce dello spazio-tempo, costituito da una coppia di campi $\{e_\theta, e_\phi\}$ tangenti alle sfere bidimensionali $S(t, r) = \{t = \mathrm{cost.}, r = \mathrm{cost.}\}$, e da una coppia di campi nulli $e_3 = \Phi^{-1}\partial_t - \Phi\partial_{r_*}$, $e_4 = \Phi^{-1}\partial_t + \Phi\partial_{r_*}$, con $\Phi^2 = 1 - \dfrac{2m}{r}$.*

Fissato $r_0 > 2m$, esiste una costante $C(m, r_0)$ tale che $(a, b = \theta, \phi)$

$$\sup_{\mathcal{S}_E(r_0)} |r^{5/2} F(e_a, e_4)| \leqslant C(m, r_0)$$

$$\sup_{\mathcal{S}_E(r_0)} |r\tau_-^{3/2} F(e_a, e_3)| \leqslant C(m, r_0)$$

$$\sup_{\mathcal{S}_E(r_0)} |r^2 (F(e_4, e_3), F(e_a, e_b))| \leqslant C(m, r_0)$$

dove

$$\mathcal{S}_E(r_0) \equiv \{p \in \mathcal{S}_E \,|\, t_p \geqslant 0,\ t_p - r_*(r) \leqslant -r_*(r_0)\}.$$

Inoltre $\lim\limits_{r_0 \to 2m} C(m, r_0) = +\infty$.

Guardando le stime asintotiche per $r \to +\infty$ delle singole componenti, si vede che nello spazio-tempo di Schwarzschild esterno si ritrovano le stime minkowskiane (vedi [3]) nonostante i coni luce dello spazio-tempo di Schwarzschild divergano da quelli minkowskiani.

È cruciale osservare che la decomposizione di F, relativa ad un riferimento adattato ai coni-luce dello spazio-tempo, permette di determinare i diversi comportamenti asintotici delle diverse componenti.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. Klainerman, *Uniform decay estimates and the Lorentz invariance of the classical wave equation*, Comm. Pure and Appl. Math., **38** (1985), 321-332.
[2] S. Klainerman, *Einstein geometry and hyperbolic equations*, Contemporary Mathematics, **71** (1988), 125-156.
[3] D. Christodoulou e S. Klainerman, *Asymptotic Properties of Linear Field Equations in Minkowski Space*, Comm. Pure Appl. Math., **43** (1990), 137-199.
[4] D. Christodoulou e S. Klainerman, *The Global Nonlinear Stability of the Minkowski Space*, Princeton Mathematical Series, **41** (1993).

Dipartimento di Matematica, Università di Roma «La Sapienza»
Indirizzo personale: via Statilio Ottato 132, 00175, Roma
Dottorato in matematica (sede amministrativa: Roma «La Sapienza») - Ciclo X
Direttore di ricerca: Prof. Francesco Nicolò, Università di Roma Tor Vergata