Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Cecilia Mancini

Modello bivariato di Cox-Ingersoll-Ross guidato da diffusioni e salti: valutazione, completamento, stimatori dei parametri

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1S, p. 121–124.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_121_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. III-A, Supplemento ad Aprile 2000, 121-124

Modello bivariato di Cox-Ingersoll-Ross guidato da diffusioni e salti: valutazione, completamento, stimatori dei parametri.

Cecilia Mancini

La tesi si colloca nel ricco filone di ricerca sui modelli stocastici per la finanza, il cui scopo è isolare fattori specifici che influenzano i prezzi dei titoli e, stabilendo criteri di razionalità e coerenza, ottenere delle informazioni da usare come riferimento nella gestione di portafogli finanziari.

Si studia un sistema dinamico che descrive l'evoluzione di due variabili: il *tasso a pronti* nominale d'interesse ([1]) r e l'indice generale dei prezzi al consumo ([2]) p. Queste sono considerate caratteristiche per il settore di mercato finanziario dei titoli obbligazionari indicizzati all'inflazione, sul quale si riversano gli investitori che vogliono tutelarsi dalla svalutazione del proprio capitale.

Si assume valido il seguente modello di tipo *jump-diffusion*: sullo spazio probabilizzato e filtrato (Ω, F, P), W^j sono Moti Browniani, N^i sono Processi Poissoniani semplici di intensità ν_i, e

$$dr_t = k(\theta - r_t)\, dt + \sigma_r \sqrt{r_t}\, dW_t^{(r)},$$

$$\frac{dp_t}{p_{t-}} = y dt + \sigma_p dW_t^{(p)} + \sum_{i=1 \dots n} \delta_i [dN_t^i - \nu^i dt], \qquad t \leq T,$$

con tutti i parametri ed r_0, p_0 costanti.

I problemi affrontati nella tesi sono stati da un lato il *pricing* e l'*hedging* di alcuni titoli finanziari, dall'altro la stima dei parametri del modello.

1. – Il problema del pricing (Capitolo 1).

Ci siamo occupati di *titoli obbligazionari* e di *titoli derivati*. Si tratta di contratti in base a cui un ente si impegna alla data t ad esborsare, all'acquirente del titolo, ad una data $T > t$, una certa somma di denaro (*claim*) $Y(\omega)$, variabile aleatoria F_T-misurabile. È chiaro che il prezzo di un siffatto titolo, arrivati all'istante T, dovrà essere esattamente Y. Ma quale prezzo l'acquirente è disposto a pagare in t, stanti precisi vincoli di equilibrio del mercato?

([1]) Ossia il processo stocastico $(r_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ che fa si che un capitale X depositato in banca in t=0, sia maturato, in $T > 0$, a $X \cdot e^{\int_0^T r_u du}$: detto, per ogni s, $v(t, s)$ il prezzo in t del BOT unitario che scade in s (chiamato anche *Zero Coupon Bond* nominale), $r_t \doteq \lim_{s \downarrow t} - \frac{\log v(t, s)}{s - t}$.

([2]) L'*inflazione realizzata* in un periodo di tempo [t, s] è definita da $\frac{p(s) - p(t)}{p(t)}$.

Per definire e trovare i prezzi di modello dei titoli, si è adottato l'approccio dell'*assenza di arbitraggi* (3). Esso comporta la ricerca di una misura di probabilità privilegiata Q (*misura di martingala*), equivalente alla legge «oggettiva» P, che rende martingala il processo prezzo attualizzato (4) di ogni titolo in un preciso insieme (*pre-base*). In questo modo il *prezzo* in t di ciascun titolo di pre-base è il valore Q-atteso del rispettivo claim attualizzato.

Questa ricerca è avallata dal primo meta-teorema (5) fondamentale dell'Asset Pricing (Harrison-Kreps, 1979; Harrison-Pliska, 1981): *l'assenza di opportunità di arbitraggio in un modello di mercato equivale all'esistenza di una misura di martingala.*

Il nostro scopo era formalizzare e precisare il primo meta-teorema per il presente modello, estendendo i risultati ottenuti, nel contesto diffusivo, in [4].

Il teorema centrale del capitolo 1 afferma che:
fissato un gruppo di $n+3$ *titoli* (*pre-base*); *sotto il vincolo dell'assenza di arbitraggi tra questi; se si vuole che la forma funzionale* $V(t, r, p)$ *che determina* (*non appena valuatata in* (t, r_t, p_t)) *il loro t-prezzo sia regolare* (*cioè funzione deterministica* $C^{1,2,2}$), *allora devono esistere* $n+2$ *processi* $(\lambda_{W^{(r)}}, \lambda_{W^{(p)}}, \lambda_{N^{(1)}}, \ldots, \lambda_{N^{(n)}})$, *funzioni deterministiche di* (t, r_t, p_t), *che legano i coefficienti di drift e di volatilità* (6) *del processo prezzo di ogni titolo di pre-base, tramite la seguente equazione, chiamata* Drift Condition,

$$\mu - rV = \lambda_{W^{(r)}} \Sigma^r + \lambda_{W^{(p)}} \Sigma^p + \sum_i \lambda_{N^{(i)}} \Delta^i V, \qquad \forall t \in [0, T],\ r > 0,\ p > 0.$$

I suddetti coefficienti sono esplicitamente espressi, in base al teorema di Ito, in funzione delle derivate parziali di $V(t, r, p)$. Cosicché, fissati opportunamente i λ, la Drift Condition risulta una equazione integro-differenziale alle derivate parziali in $V(t, r, p)$: una volta assegnate le necessarie condizioni al bordo, se ne è dimostrata l'unicità di soluzione. C'è dunque un solo modo di determinare un buon funzionale prezzo per i claim di pre-base, coerentemente con l'assenza di arbitraggi.

Se poi gli $n+3$ *titoli di pre-base contengono, per ogni t, una* base, *e cioè un gruppo di* $n+2$ *titoli la cui matrice dei coefficienti di volatilità al tempo t è invertibile quasi certamente, allora gli* $n+2$ *processi* λ *sono tali che anche il prezzo di* ogni *altro titolo deve soddisfare la Drift Condition con quegli stessi* λ.

(3) Un *arbitraggio* è una particolare strategia di investimento che permette, spendendo in t zero lire, di realizzare nel futuro un guadagno che con certezza sarà positivo.

(4) *Attualizzare un proceso prezzo* $(\mathcal{V}_t)_t$ significa considerare $(\mathcal{V}_t \cdot e^{-\int_0^t r_u du})_t$.

(5) È detto *meta-teorema* perché è esattamente un teorema per particolari tipi di modello, ma esprime nella sostanza un punto di riferimento per tutti i modelli in finanza.

(6) Ogni candidato processo prezzo $\mathcal{V}(t) = V(t, r_t, p_t)$ deve avere una dinamica del tipo

$$d\mathcal{V}_t = \mu(t-)\, dt + \Sigma^r(t-)\, dW_t^r + \Sigma^p(t-) dW_t^p + \sum_i \Delta^i V(t-)\, dN_t^i:$$

i processi $\Sigma^r(t-)/\mathcal{V}(t-)$, $\Sigma^p(t-)/\mathcal{V}(t-)$, $\Delta^i \mathcal{V}(t-)/\mathcal{V}(t-)$, sono detti *volatilità* del prezzo $\mathcal{V}$ rispetto alle fonti di aleatorietà W^r, W^p, N^i.

Quando i processi λ soddisfano precisate proprietà di integrabilità, essi permettono la costruzione (alla Girsanov) di una misura di martingala Q.

Si è infine calcolato il prezzo di alcuni titoli comuni e si è determinata una relazione (che generalizza quella di *Fisher*) tra tasso *reale* e tasso nominale d'interesse.

2. – Il problema dell'hedging (Capitolo 2).

Quando ancora non si sa se la pre-base contiene una base, lo strumento usato per definire il t-prezzo di un titolo non di pre-base è *coprire* (o *replicare*) il relativo claim Y, ossia mettere in atto una *opportuna* strategia di investimento nei titoli di pre-base che permetta al venditore del titolo, una volta riscossa e reinvestita in t la somma candidata, di garantirsi il possesso in T di Y ([7]). In tal modo anche il processo attualizzato del prezzo di Y risulta una Q-martingala.

Un modello di mercato esente da arbitraggio è detto *completo* quando è possibile replicare ogni claim $L^2(Q)$-integrabile.

Il lavoro [2] formalizza per i modelli di tipo jump-diffusion il seguente secondo meta-teorema fondamentale dell'Asset Pricing.

Sono equivalenti: la completezza del modello di mercato; l'unicità della misura di martingala; l'esistenza, per ogni t, di una base composta da un numero di titoli che sia esattamente lo stesso del numero di fonti indipendenti di incertezza che guidano il modello.

Coerentemente con questo risultato si voleva esibire come coprirsi in via pratica nel contesto attuale.

Il risultato principale è (assunta l'esistenza di una misura Q che rende martingale i prezzi attualizzati di una scelta classe infinita di titoli, detti *primari*) aver esibito per ogni t un insieme di n+2 titoli che formano una base, e precisamente: lo *Zero Coupon Bond* unitario nominale (per il quale $Y \equiv 1$), lo Zero Coupon Bond agganciato all'indice p (per il quale $Y = p_T$), ed n Opzioni Call sull'indice p aventi n differenti strike price $K_1(t), \ldots, K_n(t)$ (per ciascuna delle quali $Y = (p_T - K_j)_+$).

Sostanzialmente: combinando bene titoli scelti sul mercato, si è in grado di coprirsi da tutta l'aleatorietà indotta dai fattori r e p.

Sussiste un interessante legame tra invertibilità di matrici aventi come coefficienti funzioni calcolate in particolari punti e lineare indipenenza tra tali funzioni.

3. – La stima dei parametri (Capitoli 3 e 4).

Dal momento che i prezzi teorici dei titoli e le strategie di copertura sono funzioni dei parametri del modello, un altro aspetto rilevante è la stima di tali parametri sulla base di osservazioni dei processi p ed r: nel nostro caso queste sono disponibili solo ad n istanti discreti del tempo. Si sono determinati, per il modello avente una sola fonte di salto, stimatori che generalizzano quelli noti in letteratura per il caso diffusivo (Fournie-Talay,

([7]) Costruendo un portafoglio il cui valore sia esattamente Y alla data T.

1991; Cesari, 1992) (8). Questo aspetto ha inserito la tesi anche in un contesto di statistica dei processi.

La questione si riduceva alla stima dei parametri (costanti) del processo

$$\xi_t = at + \sigma W_t + \gamma N_t, \qquad t \leq T .$$

Riportando su grafico le osservazioni ξ_{t_i} in funzione del tempo, occorreva determinare un criterio per decidere se il salto che comunque si ha tra due successivi punti sia dovuto ad un incremento del processo Poissoniano o no.

Si ha una sostanziale differenza tra il caso in cui a, ν sono già per qualche ragione noti (T può essere fissato mentre $n \to +\infty$) ed il caso in cui tutti i parametri siano ignoti (non è possibile identificare il parametro a se T non va all'infinito: quindi $n \to \infty$, ma contemporaneamente, detto h il passo tra due osservazioni successive, $h \to 0$ in modo che $T = nh \to \infty$).

I risultati in entrambi i capitoli sono la consistenza di tutti gli stimatori $\widehat{N}_T$, $\widehat{\sigma}$, $\widehat{\gamma}$, $\widehat{a}$, $\widehat{\nu}$ e controllo della velocità di convergenza grazie a risultati di tipo asintotica normalità e principi di grandi deviazioni.

Gli stimatori $\widehat{N}_{nh}^{(n,h)}$ e $\widehat{\nu}_{n,h}$ risultano avere forti proprietà di convergenza anche nel modello più generale:

$$dY_t = a(Y_t)\,dt + \sigma(Y_t)\,dW_t + \delta(Y_{t-})\,dN_t, \qquad t \leq T ,$$

dove i coefficienti a, σ, δ non sono più costanti, ma funzioni deterministiche e limitate di Y_t.

(8) Avendo il processo r traiettorie continue, era di fatto necessario risolvere solo il problema della stima dei parametri di p.

BIBLIOGRAFIA

[1] Baldi P. e Chateleyet-Maurel M., *Sur l'equivalent du module de continuité des processus de diffusion*, Seminaire de Probabilites, **21** (1987), 404-427.

[2] Bjork T., Kabanov Y. e Runggaldier W., *Bond market structure in the presence of marked point processes*, Mathematical Finance, **7**, n. 2 (1997), 211-239.

[3] Cox J. C., Ingersoll J. E. e Ross S.A., *A theory of the term structure of interest rates*, Econometrica, **53**, n. 2 (1985), 363-407.

[4] Moriconi F., *Un modello stocastico bivariato per tassi di interesse nominali e reali*, Working Paper (1995).

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Roma «Tor Vergata»
e-mail: mancini@mat.uniroma2.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Roma II) - Ciclo IX
Direttore di ricerca: Prof. Franco Moriconi, Università degli Studi di Perugia