BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

FRANCESCA MEROLA

Orbite di gruppi di permutazioni infiniti

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1S, p. 137–139.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_137_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. III-A, Supplemento ad Aprile 2000, 137-139

Orbite di gruppi di permutazioni infiniti.

FRANCESCA MEROLA

La mia tesi tratta di una particolare classe di gruppi di permutazioni infiniti, i gruppi oligomorfi. Un gruppo G che agisce su un insieme *numerabile* Ω si dice *oligomorfo* se il numero $f_n(G)$ di orbite di G sull'insieme degli n-sottoinsiemi di Ω è finito per ogni n in $\mathbf{N}$, o in modo equivalente se il numero $F_n(G)$ di orbite di G sull'insieme delle n-ple ordinate di elementi distinti di Ω è finito per ogni n in $\mathbf{N}$. L'equivalenza di queste definizioni segue dalla disuguaglianza

$$f_n(G) \leqslant F_n(G) \leqslant n!\, f_n(G)\,, \tag{1}$$

che vale perché da ogni orbita sui sottoinsiemi si possono ottenere almeno una e al più $n!$ orbite sulle n-ple.

I gruppi oligomorfi sono studiati dagli anni 70, in particolare da P. J. Cameron e dalla sua scuola: la teoria ha molti punti in contatto con la teoria dei modelli e con l'enumerazione combinatoria. Per quanto riguarda in particolare l'enumerazione combinatoria si ha che molte successioni di notevole interesse combinatorio contano le orbite sugli n-sottoinsiemi o sulle n-ple nei gruppi oligomorfi, e che calcolare le successioni in un gruppo è spesso equivalente a risolvere problemi di enumerazione combinatoria. Per una trattazione completa dell'argomento, si può vedere la monografia di Cameron [1].

Ricordiamo che un gruppo per cui si ha $F_n = 1$ si dice *n-transitivo*, e *altamente transitivo* se è n-transitivo per ogni n; si dice *n-omogeneo* se $f_n = 1$ e *altamente omogeneo* se è n-omogeneo per ogni n.

ESEMPIO 1. – • *Il gruppo simmetrico* $S = \mathrm{Sym}(\Omega)$, Ω *numerabile. Chiaramente si ha* $f_n(S) = F_n(S) = 1$ *per ogni* n.

• *Il gruppo* $A = \mathrm{Aut}(\mathbf{Q}, \leqslant)$ *delle permutazioni dei razionali che conservano l'ordinamento. Per il gruppo* A *si ha* $f_n = 1$, $F_n = n!$.

• *Sia* C *il gruppo di tutte le permutazioni che conservano l'ordinamento circolare sull'insieme delle radici complesse dell'unità. Il gruppo* C *è transitivo, e lo stabilizzatore di un punto è isomorfo ad* A. *Per* C *si ha* $f_n = 1$, $F_n = (n-1)!$.

Uno dei problemi centrali nella teoria dei gruppi oligomorfi è lo studio delle due successioni associate ad un gruppo: si tenta di caratterizzare che proprietà hanno tali successioni.

Uno dei primi risultati che si ottengono è che le successioni sono non decrescenti. Si osserva facilmente che vale la disuguaglianza

$$F_n \leqslant F_{n+1}, \qquad \text{e si ha uguaglianza se e solo se} \qquad F_{n+1} = 1\,;$$

molto più difficile è dimostrare che vale anche la disuguaglianza

$$f_n \leqslant f_{n+1},$$

e manca una caratterizzazione dell'uguaglianza.

Diventa dunque naturale studiare quanto rapidamente crescono queste successioni. Il risultato più importante in questo campo è un teorema di H. D. Macpherson [2] che riguarda la crescita delle successioni di un gruppo *primitivo*:

TEOREMA 1 (Macpherson). – *Sia G un gruppo oligomorfo primitivo che agisce su un insieme Ω; allora si ha*

- $f_n(G) = 1$ *per ogni* n, *oppure esiste una costante* $c > 1$ *tale che* $f_n(G) \geqslant c^n$;
- $F_n(G) = 1$ *per ogni* n, *oppure* $F_n(G) \geqslant \dfrac{n!}{p(n)}$, *dove* $p(n)$ *è un polinomio che dipende dal gruppo.*

Macpherson dimosta dunque che nel caso di un gruppo primitivo se le successioni non sono costanti, la loro crescita è molto rapida.

Un altro importante risultato dovuto a P. J. Cameron è la classificazione dei gruppi altamente omogenei: abbiamo già incontrato i gruppi S, A e C; il gruppo A è sottogruppo di un gruppo di permutazioni di $\mathbf{Q}$, che chiameremo B, i cui elementi conservano o rovesciano l'ordinamento lineare; analogamente, il gruppo C è sottogruppo di un gruppo D di permutazioni che conservano o rovesciano l'ordinamento circolare. Il teorema di Cameron ci dice che non c'è altro:

TEOREMA 2 (Cameron). – *Un gruppo altamente omogeneo è un sottogruppo chiuso di uno fra i seguenti gruppi: A, B, C, D o S.*

Da questo teorema si deduce che la successione (F_n) associata a un gruppo altamente omogeneo (ma non altamente transitivo) cresce come $n!$. Il risultato principale ottenuto nella tesi è una generalizzazione del Teorema di Macpherson: ho voluto provare che gli unici gruppi che realizzano la seconda limitazione inferiore del del Teorema di Macpherson sono i gruppi altamente omogenei (ma non altamente transitivi), e che per i gruppi non altamente omogenei la crescita risulta essere molto più veloce. Ho dimostrato il seguente teorema:

TEOREMA 3. – *Sia G un gruppo oligomorfo primitivo che agisce su un insieme Ω. Allora o $f_n = 1$ per ogni n, oppure $F_n(G) \geqslant \dfrac{c^n n!}{p(n)}$, dove $p(n)$ è un polinomio che dipende dal gruppo.*

Oltre a migliorare il risultato di Macpherson di un fattore esponenziale, da questo teorema si può riottenere facilmente, tramite il Teorema 0.2 e la disuguaglianza (1), il Teorema di Macpherson.

Vediamo brevemente l'argomentazione usata nella dimostrazione del teorema. Dapprima si mostra che per dimostrare il teorema è sufficiente provare che un gruppo primitivo con crescita «lenta» (cioè con F_n più lenta di $c^n n!$) deve essere almeno 3-omogeneo: questo non è troppo difficile, e deriva dal fatto che un gruppo G ha la proprietà che la successione $F_n(G)$ è limitata inferiormente da $c^n n!$ se e solo se $F_n(G_a)$ è limitata inferiormente da $c^n n!$; cioè un gruppo con crescita «abbastanza veloce» ed il suo stabilizzatore hanno la «stessa» crescita.

La parte più complessa della tesi è provare che la primitività e la crescita lenta insieme implicano la 3-omogeneità. L'idea qui è di usare una generalizzazione dell'argomentazione usata nella dimostrazione del Teorema 0.1; Macpherson trova un sottoinsieme X con n elementi per ogni n con la proprietà che il gruppo indotto su X dallo stabizzatore insiemistico G_X ha ordine limitato da un polinomio. Noi invece avremo bisogno di un numero esponenziale di tali sottoinsiemi «asimmetrici». Per dimostrare questo, viene usato il fatto che c'è una struttura combinatoria su Ω che è G-invariante, e quindi possiamo considerare G come un sottogruppo del gruppo di automorfismi di questa struttura.

Per quanto riguarda il valore della costante c nei teoremi 0.1 e 0.3, c'è un esempio di gruppo primitivo per cui si ha $f_n \sim \frac{2^{n-1}}{n}$ e $F_n \sim 2^{n-1}(n-1)!$; questo dimostra che le limitazioni nei teoremi 0.1 e 0.3 sono le migliori possibili e che il valore della costante c dev'essere minore di 2. Macpherson ha $c \approx 2^{1/5}$, e nella tesi siamo riusciti a migliorare questo valore ottenendo $c > 2^{1/3}$. Si congettura inoltre che sia possibile, usando un raffinamento dei metodi utilizzati nella dimostazione del Teorema 0.3, ottenere il valore limite $c = 2 - \varepsilon$.

La tesi contiene inoltre alcuni risultati relativi a applicazioni del Teorema 0.3 a gruppi imprimitivi.

BIBLIOGRAFIA

[1] P. J. CAMERON, *Oligomorphic permutation groups*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **152** (Cambridge University Press, 1990).

[2] H. D. MACPHERSON, *Orbits of infinite permutation groups*, Proc. London Math. Soc., **51** (1985), 246-284.

Dipartimento di Matematica, Università di Roma «La Sapienza»
e-mail: merola@mat.uniroma1.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Messina) - Ciclo X
Direttore di ricerca: Prof. Peter J. Cameron
Queen Mary and Westfield College, University of London.