Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Sara Pasquali

Un problema di controllo stocastico per lo sfruttamento di una risorsa rinnovabile

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1S, p. 161–164.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_161_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. III-A, Supplemento ad Aprile 2000, 161-164

Un problema di controllo stocastico per lo sfruttamento di una risorsa rinnovabile.

SARA PASQUALI

1. – Introduzione.

Questo lavoro rappresenta l'estensione stocastica di un problema di controllo deterministico studiato in [6].
Si considera un problema di sfruttamento di una risorsa rinnovabile da parte di una popolazione come un problema di controllo stocastico ottimo in cui la risorsa è gestita per il benessere sociale. Si modella il problema a tempo continuo e, al fine di calcolarne una soluzione quasi ottima, lo si approssima nel tempo e nello spazio per poter applicare le tecniche di programmazione dinamica.

L'evoluzione dinamica della risorsa e della popolazione è descritta da un sistema di equazioni differenziali stocastiche, essendo tali quantità soggette a variazioni casuali; inoltre la presenza di un rumore additivo permette di tenere conto anche di possibili imprecisioni del modello.

A tale sistema di equazioni differenziali stocastiche si affianca un'ulteriore equazio-ne che descrive la variazione aleatoria del coefficiente di utilizzo della risorsa. In questa equazione il coefficiente di deriva dipende da un parametro incognito.

Risorsa, popolazione, coefficiente di utilizzo della risorsa e parametro sono le componenti dello stato X del sistema che prende valori nello spazio $\mathbf{X}$.

Lo scopo della ricerca è quello di massimizzare l'utilità totale scontata attesa sull'intervallo finito $[0, T]$ controllando il vettore bidimensionale u le cui componenti sono il consumo pro-capite e la capacità di estrazione della risorsa.

2. – Il modello.

Considerato lo spazio di probabilità $(\Omega, \mathbf{F}, P)$, l'equazione di stato è data da

$$dX(t) = f(X(t), u(t))\, dt + \sigma(X)\, dW(t) \qquad X(0) = X_0 \tag{1}$$

dove W è un vettore di processi di Wiener indipendenti e le funzioni f e σ sono tali da verificare le ipotesi del teorema di esistenza e di unicità della soluzione di un'equazione differenziale stocastica. Lo stato iniziale X_0 è noto.

A causa di errori di misurazione o di informazioni non corrette fornite dagli sfruttatori della risorsa, la risorsa stessa (indicata con $x(t)$) è solo indirettamente osservabile mediante un processo di osservazione η soddisfacente un'equazione differenziale stocastica con un piccolo rumore:

$$d\eta(t) = x(t)\, dt + \varepsilon d\widetilde{w}(t) \qquad \varepsilon > 0 \tag{2}$$

dove $\widetilde{w}(t)$ è un processo P-Wiener.

Si è quindi di fronte a un problema di controllo stocastico ottimo con osservazioni parziali e a orizzonte finito.

Risorsa e popolazione, come soluzioni di equazioni differenziali stocastiche, assumono valori reali, ma il modello ha senso solo quando esse assumono valori non negativi. Questo fatto ci porta a limitare la variabilità dello stato $X(t)$ in un insieme $\widehat{\mathbf{X}} \subset \mathbf{X}$. Al fine di mantenere lo stato all'interno di $\widehat{\mathbf{X}}$ introduciamo una nuova componente del controllo: il tempo di arresto τ e definiamo una funzione di penalizzazione $\overline{Q}$ che ci forzi a scegliere τ il più possibile vicino al tempo di uscita da $\widehat{\mathbf{X}}$ e al tempo finale T per evitare l'esaurimento della risorsa o l'estinzione della popolazione.

Definendo controlli ammissibili i controlli a valori in uno spazio compatto $\mathbf{V}$, misurabili, per ogni $t \in [0, T]$, rispetto alla σ-algebra generata dalle osservazioni fino al tempo t, il nostro problema diventa: trovare il controllo ottimo ammissibile u e il valore ottimo $\tau \in [0, T]$ che massimizzano il funzionale

$$J(u, \tau) = E\left\{ \int_0^{T \wedge \tau} e^{-\delta t} L(X(t), u(t))\, dt - \overline{Q}(\tau, X(\tau)) \right\}$$

dove L è la funzione di utilità totale e $\delta > 0$ è il tasso di sconto.

Un tale controllo può non esistere. Da un punto di vista pratico comunque potremmo essere interessati a un controllo (u^*, τ^*) ε-ottimo (cioé tale che $J(u^*, \tau^*(\geqslant \sup J(u, \tau(- \varepsilon)$ sempre esistente.

Inoltre, una soluzione esatta del problema ora descritto, se esiste, è estremamente difficile da trovare; si procede allora a una discretizzazione nel tempo e nello spazio al fine di trovare una successione di problemi approssimanti tra i quali almeno uno ha soluzione ottima che è ε-ottima per il problema originale.

3. – Tecniche di discretizzazione.

Il metodo di approssimazione seguito in questa tesi, basato su [1] e [4], riduce il problema di partenza a un problema di controllo stocastico completamente osservabile, a stati finiti e a tempo discreto, per il quale un controllo ottimo può essere calcolato utilizzando l'algoritmo di programmazione dinamica.

La procedura di discretizzazione è eseguita, prima di tutto, sui controlli: per ogni N naturale ci si limita a considerare l'insieme $\mathbf{V}_N$ dei controlli a scalini (misurabili rispetto alla σ-algebra generata dalle osservazioni) relativi ad una suddivisione dell'intervallo $[0, T]$ in sottointervalli di uguale ampiezza T/N e si approssima τ scegliendo il suo valore ottimo in un insieme finito.

PROPOSIZIONE 1

$$\sup_{u \in \mathbf{V}_N} \sup_{\tau \in \{n(T/N):\, n=0,1,\dots,N\}} J(u,\tau) \xrightarrow[N\to\infty]{} \sup_{u\in\overline{\mathbf{V}}} \sup_{\tau\in[0,T]} J(u,\tau)$$

dove $\overline{\mathbf{V}}$ *è l'insieme di tutti i controlli u ammissibili.*

Successivamente si discretizzano, nel tempo, lo stato e il funzionale J in modo da ottenere un problema discretizzato avente la stessa forma di quello originale. Per far questo è necessario passare attraverso un cambiamento di misura che renda indipendenti stato ed osservazione. In tal modo, indicando con J^N il funzionale discretizzato, si può dimostrare la seguente

PROPOSIZIONE 2.

$$|J^N(u,\tau) - J(u,\tau)| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

uniformemente in (u,τ).

Per poter applicare l'algoritmo di programmazione dinamica è necessario trasformare il problema discretizzato nel corrispondente problema «separato» che è un problema completamente osservabile in cui il nuovo stato è la distribuzione di X non normalizzata condizionata a osservazioni e controlli passati. Tale nuovo stato è infinito-dimensionale; occorre quindi renderlo finito-dimensionale e a valori finiti. In un primo tempo si suddivide lo spazio $\mathbf{X}$, analogamente a quanto fatto per $[0,T]$, in M sottoinsiemi di ampiezza tendente a zero al raffinarsi della partizione. In questo modo si può approssimare il nuovo stato con uno che può assumere solo un numero finito di valori in modo tale che il relativo funzionale $J^{N,M}$ verifichi la seguente convergenza

PROPOSIZIONE 3.

$$|J^{N,M}(u,\tau) - J^N(u,\tau)| \xrightarrow[M\to\infty]{} 0$$

uniformemente nel controllo.

In questo modo la distribuzione condizionata di X rimane infinito-dimensionale, ma può essere scritta in termini di funzioni finito-dimensionali definite ricorsivamente. Tali funzioni possono assumere solo un numero finito di valori una volta discretizzati gli spazi delle osservazioni e dei controlli. Si discretizzano quindi questi spazi, come fatto per lo spazio degli stati, in modo tale che osservazioni e controlli possano assumere solo un numero finito di valori Z. Indicando con $J^{N,M,Z}$ il funzionale ottenuto da $J^{N,M}$ sostituendo a osservazioni e controlli i loro valori discretizzati, si ha

PROPOSIZIONE 4. – *Per ogni controllo* $(u,\tau(\in \mathbf{V}_N \times \{n(T/N): n=0,1,\dots,N\}$

$$|J^{N,M,Z}(u,\tau) - J^{N,M}(u,\tau)| \xrightarrow[Z\to\infty]{} 0\,.$$

Dalle proposizioni 1, 2, 3 e 4, si ottengono subito i seguenti due risultati:

TEOREMA 1. – *Per $\varepsilon > 0$ fissato, per N, M, Z sufficientemente grandi,*

$$\left| \sup_{u \in \mathbf{V}_N^Z} \sup_{\tau \in \{n(T/N):\, n = 0, 1, \ldots, N\}} J^{N,M,Z}(u, \tau) - \sup_{u \in \overline{\mathbf{V}}} \sup_{\tau \in [0, T]} J(u, \tau) \right| \leq \varepsilon$$

dove $\mathbf{V}_N^Z$ è l'insieme dei controlli discretizzati.

TEOREMA 2. – *Per ogni controllo $(u, \tau(\in \mathbf{V}_N \times \{n(T/N): n = 0, 1, \ldots, N\}$, per N, M, Z sufficientemente grandi,*

$$|J^{N,M,Z}(u, \tau) - J(u, \tau)| \leq \varepsilon$$

Questi ultimi due risultati ci assicurano che il controllo ottenuto dal controllo ottimo del problema discretizzato mediante interpolazione costante a tratti è ε-ottimo per il problema di partenza.

4. – L'algoritmo di programmmazione dinamica.

A questo punto il problema originale è stato approssimato con un problema a stati finiti e a tempo discreto, è quindi possibile applicare l'algoritmo di programmazione dinamica per trovare il controllo ottimo del problema discretizzato.

L'algoritmo di programmazione dinamica è stato implementato in MATLAB (per un'opportuna scelta delle funzioni che intervengono) e ha permesso di calcolare il valore ottimo del funzionale per diversi livelli di approssimazione fornendo anche i grafici del controllo ottimo e dell'andamento ottimo della risorsa rinnovabile e della popolazione.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. BENSOUSSAN, W. RUNGGALDIER, *An approximation method for stochastic control problems with partial observation of the state - a method for constructing ε-optimal controls*, Acta Appl. Math., **10** (1987), 145-170.

[2] A. P. GUTIERREZ, U. REGEV, S. J. SCHREIBER, D. ZILBERMANN, *Biological and Economic Foundation of Renewable Resource Exploitation*, Ecological Economics, **26** (3) (1998), 227-242.

[3] W. J. RUNGGALDIER, L. STETTNER, *Approximations of Discrete Time Partially Observed Control Problems*, Giardini Editori e Stampatori in Pisa, (1994).

[4] W. J. RUNGGALDIER, O. ZANE, *Approximations for discrete-time adaptive control: construction of ε-optimal controls*, Math. Control, Signals and Systems, **4** (1991), 269-291.

Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Università di Padova
e-mail: pasquali@gauss.math.unipd.it

Dottorato in Matematica Computazionale (sede amministrativa: Padova) - Ciclo: XI
Direttore di ricerca: Prof. Wolfgang J. Runggaldier (Università di Padova)
Correlatore: Prof. Carla Calvi Parisetti (Università di Parma)