Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Simona Perotto

Approssimazione di flussi a superficie libera mediante modelli di Boussinesq

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1S, p. 165–168.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_165_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. III-A, Supplemento ad Aprile 2000, 165-168

Approssimazione di flussi a superficie libera mediante modelli di Boussinesq.

SIMONA PEROTTO

Lo studio e l'approssimazione di moti idrodinamici a superficie libera è l'argomento centrale di questa tesi. In particolare, essa verte sui cosiddetti *modelli di Boussinesq* adatti per studiare il moto in acque basse (*shallow water*) quando gli effetti *dispersivi* siano rilevanti [7]. Tale studio si propone di enfatizzare le diverse caratteristiche e il differente comportamento di onde lunghe e onde corte e può quindi essere inquadrato nel più generale ambito dell'analisi di fenomeni ondosi.

Un problema tipico che si presenta in presenza di *onde lunghe* è la riflessione di queste da parte di strutture portuali e di spiagge di moderata pendenza: tali strutture possono infatti entrare in risonanza con le onde lunghe di periodo appropriato, dando luogo alle cosiddette onde di marea. Le onde lunghe sono dunque associate principalmente a *fenomeni su larga scala*, come quelli appena descritti. *Fenomeni su piccola scala* invece possono essere opportunamente studiati introducendo nel modello l'effetto delle *onde corte*. Uno studio di tal genere trova una possibile applicazione nella progettazione di porti e strutture offshore e nel monitoraggio di estuari e laghi (erosione costiera, trasporto di sedimenti in sospensione, etc.).

L'interesse applicativo di questa tematica è dunque assai evidente e questo ha portato allo sviluppo sia di un'analisi teorica del problema che di schemi numerici accurati, in grado di predire il comportamento ondoso in prossimità di zone costiere. Da un punto di vista strettamente numerico, la coesistenza di onde lunghe e onde corte nello stesso dominio computazionale è fonte di considerevoli problemi nella scelta di un'appropriata griglia per la discretizzazione spaziale. Infatti, mentre una griglia rada può essere sufficiente in presenza di sole onde lunghe, una più fitta è solitamente richiesta per approssimare le onde corte in modo soddisfacente. È inoltre evidente che mentre una griglia rada mantiene il costo computazionale ad un livello affrontabile, l'utilizzo di una mesh uniformemente fitta per risolvere opportunamente le onde corte, produce un massiccio incremento di tale costo.

Una risposta ragionevole a queste osservazioni è rappresentata dall'uso delle ben note *tecniche adattive* che permettono un raffinamento della griglia solo dove effettivamente necessario, fornendo dunque un'approssimazione sufficientemente accurata con un costo computazionale accettabile.

L'analisi e l'implementazione di tecniche adattive per l'approssimazione di fenomeni associati ad onde corte sono estensivamente discusse nel Capitolo 5 di questa tesi.

Fra i vari modelli disponibili in letteratura per la descrizione di fenomeni dispersivi in acque basse, ci siamo interessati al cosiddetto modello di Boussinesq. Le *equazioni di Boussinesq*, introducendo possibili interazioni tra onde e correnti stazionarie, rappresentano il classico modello per la descrizione di onde *dispersive* caratterizzate da ampiezza finita. Tali equazioni si ottengono introducendo nelle equazioni standard delle acque basse (shallow water equations) termini che tengono conto proprio degli effetti di dispersione dell'onda. Più rigorosamente, il sistema di Boussinesq si può derivare mediante uno sviluppo asintotico dell'equazione del potenziale per moti irrotazionali [5] oppure da un'analisi perturbativa [6], ottenendo in questo modo diverse formulazioni, che differiscono essenzialmente per l'espressione assunta dai termini addizionali di dispersione.

La formulazione da noi considerata è quella classica introdotta da Peregrine [6]: essa si basa sulla *fondamentale richiesta* che i due rapporti

$$\varrho = \frac{\text{ampiezza dell' onda}}{\text{profondità dell' acqua}} = \frac{A}{H} \qquad e \qquad \sigma = \frac{\text{profondità dell' acqua}}{\textit{lunghezza d' onda}} = \frac{H}{L},$$

siano piccoli. Questo essenzialmente vuol dire che la variazione verticale dei parametri è di secondaria importanza rispetto ai cambiamenti che si hanno nella direzione orizzontale. Ad esempio, se consideriamo un'onda in prossimità della costa, le lunghezze d'onda tipiche sono dell'ordine di chilometri mentre la profondità dell'acqua è soltanto dell'ordine di alcune decine di metri.

Il modello di Boussinesq costituisce un significativo miglioramento rispetto a quello fornito dalle «shallow water equations» in quanto consente di rappresentare una moderata curvatura della superficie libera, elimina l'ipotesi di pressione idrostatica (alla base della teoria classica delle acque basse) e, come anticipato, introduce effetti di dispersione per la frequenza d'onda. D'altro canto, questo miglioramento nella capacità di modellazione è ottenuto a spese di una maggiore complessità computazionale a causa della necessità di utilizzare piccoli passi sia spaziali che temporali, il che comporta tempi computazionali più lunghi e impiego di spazi di memoria notevoli.

Per completezza, possiamo qui ricordare le equazioni di Boussinesq nel caso monodimensionale date dal seguente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial \xi}{\partial x} - \dfrac{H}{2}\,\dfrac{\partial^3}{\partial t\,\partial x^2}(Hu) + \dfrac{H^2}{6}\,\dfrac{\partial^3 u}{\partial t\,\partial x^2} = 0 & \text{in } \Omega \times (0,\, \mathrm{T}), \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}[u(\xi - H)] = 0 & \text{in } \Omega \times (0,\, T), \\ u(x,\, 0) = u_0(x), \qquad \xi(x,\, 0) = \xi_0(x) & \text{per } x \in \Omega\,, \end{cases}$$

dove $\xi = \xi(x, t)$ rappresenta il posizionamento verticale della superficie libera dell'acqua rispetto ad un livello di riferimento, $u = u(x, t)$ è la velocità orizzontale dell'acqua, H descrive la batimetria, $\Omega = (a, b)$ è il dominio spaziale e u_0 e ξ_0 sono i dati iniziali assegnati.

Si tratta dunque di un sistema di due equazioni non lineari accoppiate (rispettivamente dette equazione del momento ed equazione di continuità) in cui i due termini del terz'ordine a primo membro nell'equazione del momento sono i sopra citati termini dispersivi di Boussinesq.

In letteratura, sono presenti pochissimi risultati teorici riguardanti tale sistema di equazioni. In particolare il problema dell' esistenza e unicità della soluzione è stato poco studiato. I pochi risultati disponibili sono caratterizzati da richieste di regolarità sulla soluzione molto restrittive, che sovente non corrispondono alle situazioni reali. Per questo motivo, uno degli obiettivi principali di questa tesi è stato determinare una formulazione matematica caratterizzata da ipotesi minimali di regolarità della soluzione ed adeguata sia per l'analisi teorica che per quella numerica, in una e due dimensioni. Questo ha portato di conseguenza alla necessità di considerare soltanto condizioni al bordo molto semplici, seppur realistiche (caso di bacini chiusi).

Per quanto riguarda lo schema numerico, ci siamo basati su un un metodo ad elementi finiti continui in spazio ma discontinui in tempo [2], mai utilizzato precedentemente per questo tipo di equazioni. L'impiego di elementi finiti per queste problematiche è relativamente nuovo. Gli schemi a differenze finite erano infatti le tecniche principalmente usate in letteratura. Solo recentemente, metodi basati sugli elementi finiti sono diventati uno strumento numerico consolidato per la simulazione di flussi idrodinamici [1]. La ragione principale della nostra scelta sta principalmente nel fatto che tali metodi forniscono un ambiente naturale in cui sviluppare *stime a posteriori dell'errore*, base di ogni buona procedura adattiva. Può essere inoltre interessante osservare che l'impiego di un'approssimazione discontinua in tempo permette di avere sistemi di equazioni disaccoppiate in tempo e di sviluppare quindi algoritmi di basso costo computazionale.

Per finire, possiamo così brevemente riassumere il contenuto di ciascuno dei sei capitoli costituenti questa tesi.

Nel primo capitolo, viene fornito una introduzione alla fisica dei fenomeni di tipo ondoso, enfatizzando soprattutto gli effetti dispersivi che possono caratterizzarli. Con il Capitolo 2 diamo invece un'ampia panoramica dei modelli di Boussinesq più ricorrenti in letteratura.

La scelta del particolare modello di Boussinesq da noi analizzato viene giustificata nel capitolo successivo, in cui vengono inoltre forniti, come risultati originali, una stima a priori e un risultato di esistenza ed unicità per la soluzione della formulazione debole del sistema di Boussinesq. La discretizzazione ad elementi finiti, sia per il caso monodimensionale che per quello bidimensionale, viene introdotta nel Capitolo 4 mentre nel Capitolo 5 deriviamo, come risultati originali, le corrispondenti stime a posteriori per l'errore, estendendo al nostro caso la teoria sviluppata in [2] e [4]. Infine, un'ampia validazione numerica è effettuata nel Capitolo 6, al fine di testare sia lo schema numerico che i metodi adattivi associati alle differenti stime a posteriori presentate nel capitolo precedente. A tal fine sono stati considerati casi-test classici della letteratura quali, ad esempio, l'interazione tra più onde solitarie, lo sviluppo di un'onda solitaria su di una batimetria a pendenza variabile, lo sviluppo di un'onda solitaria che supera un ostacolo. Alcuni risultati di questa tesi sono stati raccolti in [3].

BIBLIOGRAFIA

[1] ANTUNES DO CARMO J. S. e SEABRA-SANTOS F. J., *On Breaking Waves and Wave-current Interaction in Shallow Water: a 2DH Finite Element Model*, Internat. J. Numer. Methods Fluids, **22** (1996), 429-444.

[2] ERIKSSON K., ESTEP D., HANSBO P. e JOHNSON C., *Computational Differential Equations*, Cambridge University Press, Cambridge (1996).

[3] GRASSELLI M., PEROTTO S. e SALERI F., *Space-Time Finite Elements for Boussinesq Equations*, to appear on East-West J. Numer. Math (1999).

[4] HOUSTON P. e SÜLI E., *A Posteriori Error Analysis for Linear Convection-Diffusion Problems Under Weak Mesh Regularity Assumptions*, Technical Report NA97/03, Oxford University Computing Laboratory, Oxford, England (1997).

[5] KELLER J. B., *Surface Waves on Water of Non-uniform Depth*, J. Fluid Mech., **4** (1958), 607-614.

[6] PEREGRINE D. H., *Long Waves on a Beach*, J. Fluid Mech., **27, part 4** (1967), 815-827.

[7] WHITHAM G. G., *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley-Interscience, New York (1974).

Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano, Via Bonardi 9, 20133, Milano
e-mail: simona@mate.polimi.it

Dottorato in Matematica Computazionale e Ricerca Operativa
(sede amministrativa: Milano) - Ciclo XI
Direttore di ricerca: Professor Alfio Quarteroni, EPFL, Lausanne
Corelatore: Professor Fausto Saleri, Università degli Studi di Milano