Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Luca Preciso

Analisi di tipo perturbativo del problema di incollamento conforme e questioni collegate

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1S, p. 185–187.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_185_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. III-A, Supplemento ad Aprile 2000, 185-187

Analisi di tipo perturbativo del problema di incollamento conforme e questioni collegate.

LUCA PRECISO

In questa tesi affrontiamo alcune questioni di analisi funzionale non lineare collegate allo studio di tipo perturbativo di problemi al contorno per funzione olomorfe di una variabile complessa. In particolare effettuiamo un'analisi di tipo perturbativo del problema di cucitura conforme in alcuni spazi di funzioni ovvero lo studio della regolarità della dipendenza funzionale della soluzione del problema di cucitura conforme da una particolare curva del piano complesso, diciamo ϕ, che definisce il problema e che supponiamo nota. Tale studio può essere utilizzato per giustificare la validità di uno schema perturbativo noto che fornisce informazioni sulla variazione della soluzione del problema di cucitura conforme al variare di ϕ; queste informazioni appaiono difficilmente reperibili direttamente in quanto, limitatamente alle nostre conoscenze, non esiste un'espressione esplicita di tale soluzione. Poiché l'equazione funzionale che individua la soluzione del problema di cucitura conforme coinvolge l'integrale singolare di Cauchy sulla curva ϕ, per poter applicare il Teorema della Funzione Implicita nella sua formulazione per spazi di Banach, dobbiamo prima studiare la regolarità della dipendenza funzionale dell'integrale singolare di Cauchy dalla curva ϕ.

Nel Capitolo II infatti, consideriamo l'integrale singolare di Cauchy

$$C[\phi, f](\cdot) \equiv \frac{1}{2\pi i}\,\text{p.v.}\int_{\partial\mathbf{D}} \frac{f(t)\,\phi'(t)}{\phi(t)-\phi(\cdot)}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\,\text{p.v.}\int_{\phi} \frac{f\circ\phi^{(-1)}(\xi)}{\xi-\phi(\cdot)}\,d\xi \tag{1}$$

dove la curva semplice orientata ϕ e la funzione densità f sono entrambe definite nel bordo orientato $\partial\mathbf{D}$ del disco unitario aperto $\mathbf{D}$ del piano complesso $\mathbf{C}$. Nonostante temi di ricerca come le proprietà dell'operatore lineare $C[\phi, \cdot]$ ed il calcolo numerico della funzione $C[\phi, f]$ siano stati approfonditamente studiati a partire dal secolo scorso in vista di numerose applicazioni alle equazioni integrali e ai problemi al contorno (cf. *e.g.* [2]), l'analisi della dipendenza funzionale di $C[\phi, f]$ da entrambe gli argomenti, ed in particolare da ϕ, sembra cominciare solo di recente.

Ci proponiamo di estendere un risultato di analiticità per l'operatore $C[\cdot, \cdot]$ di Coifman & Meyer (cf. [1]) ad un contesto di spazi di Schauder. Assumiamo che ϕ e f appartengano ad uno spazio di Schauder, che chiameremo $\mathcal{C}_*^{m,\alpha}(\partial\mathbf{D}, \mathbf{C})$, costituito dalle funzioni derivabili m volte su $\partial\mathbf{D}$ e con derivata m-esima hölderiana di esponente α, dove m è un numero naturale positivo ed $\alpha \in]0, 1[$. È ben noto che sotto queste ipotesi su ϕ e f, anche la funzione $C[\phi, f](\cdot)$ appartiene

$\mathcal{C}_*^{m,\alpha}(\partial\mathbf{D}, \mathbf{C})$. Dimostrando esistenza ed unicità di soluzione per un problema al contorno di tipo ellittico ed applicando il Teorema della Funzione Implicita, otteniamo che l'operatore $C[\cdot, \cdot]$ è reale analitico. Successivamente calcoliamo tutti i differenziali di $C[\cdot, \cdot]$ e proviamo che $C[\cdot, \cdot]$ è analitico in senso complesso. La maggiore difficoltà consiste nel trovare un'opportuno problema al contorno la cui soluzione coinvolga l'integrale singolare di Cauchy e che possa essere riformulato in modo che le ipotesi del Teorema della Funzione Implicita siano soddisfatte. Questo risultato dovuto a Lanza e al sottoscritto verrà applicato nella seconda parte della tesi ed in un altro problema di perturbazione relativo ad un'equazione integrale non lineare da Lanza & Rogosin.

Nel Capitolo III, introduciamo il problema di cucitura conforme associato ad uno shift ϕ di $\partial\mathbf{D}$, *i.e.* un omeomorfismo di $\partial\mathbf{D}$ in sé, che in ambito classico viene supposto appartenere a $\mathcal{C}_*^{1,\alpha}(\partial\mathbf{D}, \mathbf{C})$ e con derivata mai nulla su $\partial\mathbf{D}$. Tale problema consiste nella ricerca di una coppia di funzioni continue (F, G) definite in $\mathrm{cl}\,\mathbf{D}$ e $\mathbf{C}\setminus\mathbf{D}$ ed olomorfe in $\mathbf{D}$ e $\mathbf{C}\setminus\mathrm{cl}\,\mathbf{D}$, rispettivamente, che soddisfi la condizione di normalizzazione $\lim_{z\to\infty} G(z) - z = 0$ e la condizione al contorno

$$F(\phi(t)) = G(t) \tag{2}$$

per ogni $t \in \partial\mathbf{D}$. Risultati noti (cf. *e.g.* [2]) assicurano che il problema di cucitura conforme abbia un'unica soluzione (F, G) e che in tal caso F e G sono omeomorfismi tali che $F(\mathbf{D})$ e $G(\mathbf{C}\setminus\mathrm{cl}\,\mathbf{D})$ coincidano con le due componenti connesse di $\mathbf{C}\setminus F(\partial\mathbf{D})$. Indichiamo quindi con $(F[\cdot], G[\cdot])$ la coppia di operatori che mappa lo shift ϕ nella traccia su $\partial\mathbf{D}$ di tale soluzione.

Le proprietà di regolarità degli operatori $F[\cdot]$ e $G[\cdot]$ in spazi di funzioni regolari possono essere usate per giustificare la validità di uno schema perturbativo dovuto a Nag (cf. [5]) che ha introdotto un metodo per calcolare ricorsivamente le variazioni in t di $F[\phi_t]$ e $G[\phi_t]$ dove $\{\phi_t\colon t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\}$ è una famiglia monoparametrica di shift analitici dipendenti in modo analitico dal parametro reale t. Quindi ci proponiamo di trovare spazi di funzioni regolari rispetto ai quali gli operatori $F[\cdot]$ e $G[\cdot]$ siano analitici. In letteratura esistono già dei contributi in tal direzione (cf. *e.g.* [3]) ma questi riguardano la sola continuità degli operatori $F[\cdot]$ e $G[\cdot]$.

Prima studiamo la regolarità di tali operatori negli spazi di Schauder $\mathcal{C}_*^{m,\alpha}(\partial\mathbf{D}, \mathbf{C})$, con $m \geq 1$, $\alpha \in]0, 1[$. In tal caso la scelta dell'equazione funzionale a cui applicare il Teorema della Funzione Implicita è naturale ed infatti consideriamo l'equazione funzionale classica associata a questo problema della forma

$$\Gamma[\phi, g] = 1_{\partial\mathbf{D}} \tag{3}$$

(dove $1_{\partial\mathbf{D}}$ è la funzione identica di $\partial\mathbf{D}$ e $\Gamma[\cdot, \cdot]$ è lineare nella seconda variabile) che ha come unica soluzione $g \equiv G[\phi]$. Siccome l'insieme degli shift non è aperto negli spazi di Schauder, osserviamo che l'operatore $\Gamma[\cdot, \cdot]$ risulta definito anche per curve ϕ più generali degli shift le quali formano un sottinsieme aperto nei suddetti spazi di Schauder. Dal risultato del Capitolo II segue subito che $\Gamma[\cdot, \cdot]$ è analitico in senso complesso. Estendendo la teoria della regolarità per la soluzione dell'equazione (3), dimostriamo la biiettività dell'operatore $\Gamma[\phi, \cdot]$ negli spazi di Schauder. Da questo otteniamo che $G[\phi]$ e quindi $F[\phi] = G[\phi] \circ \phi^{(-1)}$ appartengono a $\mathcal{C}_*^{m,\alpha}(\partial\mathbf{D}, \mathbf{C})$ quando ϕ appartiene $\mathcal{C}_*^{m,\alpha}(\partial\mathbf{D}, \mathbf{C})$ e deduciamo anche l'applicabilità del Teorema della Funzione Implicita all'equazione (3) che mostra che $G[\cdot]$ si estende ad un operatore analitico in senso complesso. Usando [4], mostriamo poi stime ottimali sulla regolarità dell'operatore $F[\cdot]$. In particolare riscontriamo che il contesto degli spazi di Schauder non è sufficiente per ottenere un'estensione analitica anche per l'operatore $F[\cdot]$ a causa della presenza dell'operatore di composizione e di inversione (entrambe non analitici negli spazi di Schauder) nella sua definizione. Inoltre l'appartenenza di ϕ ad uno spazio di funzioni reali analitiche di $\partial\mathbf{D}$ in $\mathbf{C}$ si rivela essere una condizione naturale per avere un'estensione analitica di $F[\cdot]$.

Nel Capitolo IV consideriamo dei ben noti spazi di funzioni reali analitiche, vale a dire dei particolari spazi alla Roumieu associati all'operatore di differenziazione. In questo contesto ci proponiamo di mostrare che la dipendenza di $G[\phi]$ e di $F[\phi]$ da ϕ è analitica in senso complesso. Per raggiungere tale obiettivo prima osserviamo che gli operatori $F[\cdot]$ e $G[\cdot]$ hanno estensioni analitiche usando spazi alla Roumieu nel dominio e spazi di Schauder nel codominio: per far questo nel caso dell'operatore $F[\cdot]$, costruiamo un operatore di estensione da spazi alla Roumieu su $\partial\mathbf{D}$ a spazi alla Roumieu su un intorno chiuso di $\partial\mathbf{D}$ che ci permette di applicare i risultati di regolarità per l'operatore di composizione e di inversione di Lanza (cf. [4]). Successivamente effettuando una stima della crescita delle norme dei differenziali n-esimi di $F[\cdot]$ e $G[\cdot]$ in un contesto di spazi alla Roumieu, otteniamo che tali operatori ammettono localmente delle estensioni ad operatori analitici in senso complesso anche usando le più forti norme alla Roumieu nel codominio.

BIBLIOGRAFIA

[1] COIFMAN R. R. e MEYER Y., *Lavrentiev's curves and conformal mappings*, Report no. 5 Institut Mittag-Leffler (1983), 1-24.

[2] GAKHOV F. D., *Boundary value problems*, Pergamon Press (1966).

[3] HUBER A. e KÜHNAU R., *Stabilität konformer Verheftung*, Comment. Math. Helvetici, **69** (1994), 311-321.

[4] LANZA DE CRISTOFORIS M., *Higher order differentiability properties of the composition and of the inversion operator*, Indag. Mathem. N.S., **5** (1994), 457-482.

[5] NAG S., *Singular Cauchy integral and conformal welding on Jordan curves*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math., **21** (1996), 81-88.

Via Duca degli Abruzzi 7, 30031 Dolo (VE)
e-mail: preciso@math.unipd.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Padova) - Ciclo X
Direttore di ricerca: Prof. Massimo Lanza de Cristoforis, Università di Padova