Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Enrico Priola

Equazioni alle derivate parziali con infinite variabili

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1S, p. 189–192.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_189_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. III-A, Supplemento ad Aprile 2000, 189-192

Equazioni alle derivate parziali con infinite variabili.

ENRICO PRIOLA

La tesi riguarda principalmente equazione ellittiche e paraboliche del secondo ordine con infinite variabili del seguente tipo:

$$\lambda\psi(x) - \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,[Q(x)\,D^2\psi(x)] - \langle D\psi(x), Ax\rangle = f(x), \qquad x \in H,\ \lambda > 0\,, \tag{1}$$

$$\begin{cases} D_t u(t, x) = \\ = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,[Q(x)\,D_x^2 u(t, x)] + \langle D_x u(t, x), Ax\rangle + F(t, x), \quad t \in]0, T],\ x \in D(A)\,, \\ u(0, x) = g(x)\,, \qquad x \in H\,, \end{cases} \tag{2}$$

dove H indica uno spazio di Hilbert separabile (indichiamo con $< \cdot, \cdot >$ il suo prodotto interno) e f, g: $H \mapsto \mathbb{R}$ appartengono allo spazio $\mathcal{C}_b(H)$ delle funzioni uniformemente continue e limitate su H. Inoltre $Q(x)$, $x \in H$, sono opportuni operatori lineari, limitati, simmetrici e non negativi su H e A è un operatore lineare, con dominio $D(A)$, che genera un $\mathcal{C}_0$-semigruppo su H. Noi indichiamo con $\mathrm{Tr}\,(Q(x)\,D^2\psi(x))$, la traccia di $Q(x)\,D^2\psi(x)$, $x \in H$.

Nel caso in cui H ha dimensione finita, $H = \mathbb{R}^n$, le equazioni (1) e (2) possono essere scritte rispettivamente come

$$\lambda\psi(x) - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} q_{ij}(x)\,D_{ij}^2\psi(x) - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}D_i\psi(x)\,x_j = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ \lambda > 0\,, \tag{3}$$

$$\begin{cases} D_t u(t, x) = \\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} q_{ij}(x)\,D_{ij}^2 u(t, x) + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}D_i u(t, x)\,x_j + F(t, x),\ t \in]0, T]\,, \\ u(0, x) = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{4}$$

C'è un crescente interesse nello studio di PDEs con infinite variabili come (1) and (2). Tali equazioni hanno applicazioni in Teoria dei Campi e in Meccanica Statistica per descrivere sistemi fisici con infiniti gradi di libertà (vedere per esempio la recente monografia di Berezansky and Kondratiev [1]).
Un'altra importante motivazione per studiare (1) e (2) viene da una ben nota connessione con equazioni differenziali stocastiche come

$$\begin{cases} dX(t) = AX(t)\,dt + Q^{1/2}(X(t))\,dW(t), \qquad t \geqslant 0\,, \\ X(0) = x, \qquad x \in H\,, \end{cases}$$

dove $W(t)$ è un processo di Wiener a valori in H definito su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (per maggiori dettagli noi ci riferiamo a [5]). Importanti fenomeni fisici che riguardano per esempio la Teoria della Quantizzazione Stocastica, possono essere descritti attraverso equazioni come (5).

Assumiamo di sapere risolvere l'equazione (5) e indichiamo con $X(\cdot, x)(\omega)$ la corrispondente soluzione. Ponendo

$$u(t, x) = \int_{\Omega} f(X(t, x)(\omega))\, P(d\omega), \tag{6}$$

$f \in \mathcal{C}_b(H)$, risulta che $u(t, x) = S_t f(x)$ è formalmente la soluzione dell'equazione (2) con $F = 0$. Il semigruppo S_t è chiamato *semigruppo di transizione di Markov*, mentre (2) è chiamata *equazione di Kolmogorov*. L'esistenza del semigruppo di Markov S_t per (2) permette anche di scrivere la soluzione di (1), attraverso la trasformata di Laplace di S_t.

Per risolvere (2) ci sono due approcci possibili: uno è deterministico ed estende i metodi classici per le PDEs; l'altro è stocastico e consiste prima nel risolvere l'equazione (5) e poi nell'usare la formula (6) per trovare una soluzione a (2). L'approccio stocastico permette di risolvere anche equazioni degeneri ma richiede forti ipotesi sulla regolarità dei coefficienti $Q(x)$. È notevole notare che trovare una soluzione regolare per (1) o (2), con metodi analitici, permette di ottenere l'unicità in legge per l'equazione (5), generalizzando un classico metodo proposto da D. Stroock e S. R. S. Varadhan.

Assumendo che $A = 0$ e $Q(x) = Q$, $x \in H$, dove Q è un operatore positivo e simmetrico di classe traccia, le equazioni (1) and (2) furono inizialmente studiate da L. Gross (vedere [4]) e Y. L. Dalecky. In [4] è anche presente un'estensione della classica teoria del Potenziale per problemi di Dirichlet in dimensione infinita, usando metodi probabilistici e introducendo la nozione di spazio di Wiener astratto.

In seguito A. Piech e M. I. Vishik hanno considerato il caso di

$$Q(x) = Q^{1/2}(I + G(x))\, Q^{1/2}, \qquad x \in H, \tag{7}$$

dove $G(x)$ è una famiglia di operatori di classe traccia su H che soddisfano opportune condizioni di regolarità. Il caso in cui $Q(x) = Q$, $x \in H$, è un operatore positivo di classe traccia su H e A genera un $\mathcal{C}_0$-semigruppo su H, l'equazione (2) fu studiata per la prima volta da Y. L. Dalecky che provò l'esistenza e l'unicità di una soluzione «generalizzata» u.

Proprietà di regolarità per la soluzione u furono ottenute in [2], usando metodi analitici e da G. Da Prato e J. Zabczyk, risolvendo la corrispondente equazione stocastica (vedere [5]). In [3] Cannarsa e Da Prato hanno ottenuto risultati di regolarità ottimale per l'equazione (1), quando G è Hölder continua da H nello spazio degli operatori di classe traccia.

Infine un possibile approccio per studiare (1), (2) negli spazi $L^p(H, \mu)$, dove μ è una opportuna misura di Borel su H associata a (1), può essere sviluppato attraverso le forme di Dirichlet (vedere il corso di M. Rockner in [5]).

In questa tesi noi studiamo (1) e (2) nello spazio di Banach $\mathcal{C}_b(H)$, munito della norma del sup. Utilizziamo solo strumenti analitici, principalmente Teoria dei Semigruppi, Teoria dell'Interpolazione e proprietà delle misure Gaussiane in dimensione infinita. Discuteremo ora due fra i risultati originali contenuti nella tesi.

Il primo è un risultato di regolarità ottimale per la soluzione ψ di un problema di Dirichlet omogeneo su un semispazio H_+ di H, associato a (1) (vedere capitolo 5). Noi assumiamo: $A = 0$ e $Q(x) = Q$, $x \in H_+$, Q operatore positivo e di classe traccia su H. I risultati di regolarità ottimale per la soluzione estendono quelli provati in [3] per l'equazione (1) sull'intero spazio H.

Inizialmente introduciamo una nozione di soluzione forte per il problema di Dirichlet e mostriamo che per ogni dato $f \in \mathcal{C}_b(H_+)$, esiste un'unica soluzione forte del problema. Per stabilire i risultati di regolarità di tipo Hölder in dimensione infinita è necessario considerare differenziabilità e Hölderianità di funzioni lungo le direzioni del sottospazio $Q^{1/2}H$, che chiameremo Q-Hölderianità e Q-differenziabilità. Inoltre D_Q and D_Q^2 indicano rispettivamente la Q-derivata prima e seconda (queste derivate furono introdotte in [4]). Se $\dim(H) < \infty$, la Q-differenziabilità e Q-Hölderianità coincidono con l'usuale Fréchet differenziabilità e Hölderianità.

Il nostro teorema principale afferma che se il dato f è $Q-$Hölder continuo su H_+ e Hölder continuo (nel significato usuale) sul bordo di H_+, allora la corrispondente soluzione forte ψ e due volte Q-differenziabile su H_+ e $D_Q\psi$, $D_Q^2\psi$ sono uniformemente continue e limitate; inoltre $D_Q^2\psi \colon H_+ \to \mathcal{L}(H)$ è Q-Hölder continua su H_+ e Hölder continua sul bordo di H_+ e valgono stime di tipo Schauder per la soluzione e le sue Q-derivate. Per provare il teorema si mostra che la soluzione forte ψ è data dalla seguente formula esplicita:

$$\psi(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t f(x)\, dt, \qquad x \in H_+, \tag{8}$$

dove P_t è un semigruppo di operatori lineari e limitati su $\mathcal{C}_b(H_+)$, «naturalmente» associato al problema (i.e. $u(t, x) = P_t g(x)$ fornisce la soluzione del problema di Dirichlet parabolico corrispondente) e l'integrale in (8) è definito puntualmente. I risultati di regolarità per la ψ seguono dallo studio delle proprietà di differenziabilità di P_t (che è un particolare semigruppo di transizione di Markov). Per fare questo è necessario l'uso di risultati di Teoria dell'Interpolazione.

Nel capito 7 della tesi vengono studiati problemi di Cauchy come (2). A questo fine viene introdotta una nuova classe di semigruppi di operatori lineari e continui su $\mathcal{C}_b(H)$, non necessariamente fortemente continui, chiamati $\pi-$semigruppi. All'interno della teoria dei $\pi-$semigruppi viene studiato il problema di Cauchy (2). Vengono precisate le nozioni di soluzione stretta e forte per il problema di Cauchy e si provano vari teoremi di esistenza, unicità e regolarità per le soluzioni strette e forti.

Consideriamo il caso $Q(x) = Q$, $x \in H$, dove Q è un operatore limitato e non negativo. Supponiamo che l'operatore Q_t, $Q_t x = \int_0^t e^{sA} Q e^{sA^*} x \, ds$, $x \in H$, $t \geqslant 0$, sia di classe traccia. In questo caso la soluzione di (2) con $F = 0$ è data da $u(t, x) = U_t g(x)$, $t \geqslant 0$, $x \in H$, dove U_t è il semigruppo di Ornstein-Uhlenbeck, dato dalla formula

$$U_t g(x) = \int_H g(e^{tA} x + y) \, N(0, Q_t) \, dy \,, \qquad x \in H, \; t \geqslant 0 \,. \tag{9}$$

Qui e^{tA} è il semigruppo generato da A e $N(0, Q_t)$ è la misura Gaussiana su H con media 0 e operatore di covarianza Q_t. U_t non è un $\mathcal{C}_0$-semigruppo su $\mathcal{C}_b(H)$ anche se $H = \mathbb{R}$. Nel caso in cui il dato F è continuo e limitato su $[0, T] \times H$ e $g \in \mathcal{C}_b(H)$, c'è una «naturale» candidata soluzione u, data dalla formula «mild»

$$u(t, x) = U_t g(x) + \int_0^t U_{t-s} F(s, x) \, ds, \qquad t \in [0, T], \; x \in H \,. \tag{10}$$

Rimaneva aperto da [2] il problema stabilire in quale senso u era l'*unica* soluzione di (2). Questo problema viene risolto dal nostro risultato. Esso afferma:

(a) la mappa u soddisfa la seguente proprietà: esiste una successione (u_n) di soluzioni strette (differenziabili in senso classico) che risolvono (2) con dati g_n e F_n, tali che u_n, g_n ed F_n convergono puntualmente rispettivamente a u, g e F e vale la stima: $\sup_{n \geqslant 1}(\|g_n\|_0 + \|F_n\|_0 + \|u_n\|_0) < \infty$;

(b) u è l'unica funzione continua e limitata su $[0, T] \times H$ che gode della proprietà (a).

BIBLIOGRAFIA

[1] Berezansky Y. M. & Kondratiev Y. G., *Spectral Methods in Infinite-Dimensional Analysis, Vol.* 1-2, Kluwer Academic Publishers (1995).

[2] Cannarsa P. & Da Prato G., *On functional analysis approach to parabolic equations in infinite dimensions*, J. Funct. Anal., **118** (1993), 199-200.

[3] Cannarsa P. & Da Prato G., *Infinite Dimensional Elliptic Equations with Hölder continuous coefficients*, Advances in Differential equations, **1** n. 3 (1996), 425-452.

[4] Gross L., *Potential theory on Hilbert space*, J. Funct. Anal., **1** (1967), 123-181.

[5] Krylov N. V. & Rockner M. & Zabczyk J., *Stochastic PDE's and Kolmogorov Equations in Infinite Dimensions*, Corso CIME, apparirà in Lect. Notes in Math., Springer Verlag.

Scuola Normale Superiore di Pisa
e-mail: priola@cibs.sns.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Milano) - Ciclo X
Direttore di ricerca: Prof. Giuseppe Da Prato, Scuola Normale Superiore di Pisa