Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Tonia Ricciardi

Problemi ellittici nonlineari nella teoria di gauge di Chern-Simons

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1S, p. 193–196.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_193_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. III-A, Supplemento ad Aprile 2000, 193-196

Problemi ellittici nonlineari nella teoria di gauge di Chern-Simons.

TONIA RICCIARDI

La teoria di gauge di Chern-Simons è di interesse nella descrizione della superconduttività ad alte temperature e dell'effetto di Hall quantistico. Per i modelli che presentano una struttura autoduale, un metodo dovuto a Taubes permette di ricondurre la ricerca di configurazioni statiche allo studio di problemi ellittici con nonlinearità di tipo esponenziale, aventi in generale una struttura variazionale.

Una prima parte della tesi riguarda lo studio delle configurazioni statiche periodiche per il modello autoduale introdotto da Lee-Lee-Min. Esso è definito su $(\mathbf{R}^{1+2}, \operatorname{diag}(-1, 1, 1))$ in termini di un potenziale di gauge reale $A = A_\alpha \, dx^\alpha$, $\alpha = 0, 1, 2$, di un campo di Higgs complesso ϕ e di un campo neutro reale N, dalla lagrangiana:

$$\mathcal{L}(A, \phi, N) = -\frac{1}{4q^2} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{\mu}{2q^2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} A_\alpha \partial_\beta A_\gamma - $$

$$- D_\alpha \phi (D^\alpha \phi)^* - \frac{1}{2q^2} \partial_\alpha N \partial^\alpha N - V(|\phi|, N),$$

dove il potenziale V è dato da

$$V(|\phi|, N) = |\phi|^2 \left(N - \frac{q^2}{\mu} \right)^2 + \frac{q^2}{2} \left(|\phi|^2 - \frac{\mu}{q^2} N \right)^2$$

e dove $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} A_\alpha \partial_\beta A_\gamma$ è il termine di Chern-Simons ($\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$ è il tensore totalmente antisimmetrico tale che $\varepsilon^{012} = 1$); inoltre $D_\alpha = \partial_\alpha + iA_\alpha$, $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$, $\alpha, \beta = 0, 1, 2$, e le costanti $q > 0$ e $\mu > 0$ denotano la carica elettrica e la massa di Chern-Simons, rispettivamente. $\mathcal{L}$ è invariante rispetto alla trasformazione di gauge abeliana $(A, \phi, N) \to (A + d\omega, e^{-i\omega} \phi, N)$ per ogni funzione reale ω. Come già osservato da Lee-Lee-Min, nel limite $\mu, q \to +\infty$, con q^2/μ costante (limite CS), si ottiene formalmente il modello autoduale di Chern-Simons introdotto da Hong-Kim-Pac e Jackiw-Weinberg:

$$\mathcal{L}^{CS}(A, \phi) = \frac{\kappa}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} A_\alpha \partial_\beta A_\gamma - D_\alpha \phi (D^\alpha \phi)^* - \frac{1}{\kappa^2} |\phi|^2 (|\phi|^2 - 1)^2.$$

Invece, nel limite $\mu \to 0$, con q fissato (AH limit), si ottiene il modello abeliano di Higgs (il modello di Ginzburg-Landau nel caso autoduale):

$$\mathcal{L}^{AH}(A, \phi) = -\frac{1}{4q^2} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - D_\alpha \phi (D^\alpha \phi)^* - \frac{q^2}{2} (|\phi|^2 - 1)^2.$$

In questo senso, $\mathcal{L}$ «unifica» $\mathcal{L}^{CS}$ e $\mathcal{L}^{AH}$. Nella tesi si verificano rigorosamente tali

comportamenti asintotici, nel caso di configurazioni statiche periodiche (corrispondenti dal punto di vista fisico agli «stati misti di Abrikosov»). Si è visto che, similmente al modello $\mathcal{L}^{CS}$, per ogni *prefissato* insieme di punti di vorticità (zeri di ϕ), $\mathcal{L}$ ammette in generale *due* configurazioni statiche periodiche distinte. Nel limite CS entrambe le configurazioni convergono fortemente a corrispondenti configurazioni per $\mathcal{L}^{CS}$; invece, nel limite AH solo la configurazione «massimale» converge ad una corrispondente configurazione per $\mathcal{L}^{AH}$, mentre l'altra diverge.
Più precisamente, sia $\Omega = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ il toro piatto (i risultati si estendono senza modifiche sostanziali ad arbitrarie varietà compatte bidimensionali) e dati n punti $p_1, \ldots, p_n \in \Omega$ sia $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ il prefissato insieme di punti di vorticità (non necessariamente distinti). Diremo *P-vortice* una configurazione statica periodica di $\mathcal{L}$ avente punti di vorticità esattamente nei punti p_j, $j = 1, \ldots, n$ (cioè tale che ϕ ha zeri, possibilmente multipli, esattamente nei punti p_j, $j = 1, \ldots, n$).

TEOREMA 1. – *Le condizioni $q^2 > 2\pi n$ e $0 < \mu < (2\sqrt{\pi n})^{-1}(q^2 - 2\pi n)$ sono necessarie per l'esistenza di un P-vortice. Inoltre, esiste una costante $\kappa_* \in (0, (2\sqrt{\pi n})^{-1})$ (dipendente da P) tale che per ogni $0 < \mu < \kappa_*(q^2 - 2\pi n)$ esistono almeno due P-vortici distinti, denotati $(A, \phi, N)^{\pm}_{\mu}$.*

TEOREMA 2. – *Fissato $\kappa \in (0, \kappa_*)$, siano μ, q sufficientemente grandi tali che $\mu/q^2 = \kappa$ e $\mu < \kappa^*(q^2 - 2\pi n)$, e siano $(A, \phi, N)^{\pm}_{\mu}$ i due P-vortici esistenti per il Teorema 1. Esistono due P-vortici $(\tilde{A}, \tilde{\phi})^{\pm}_{\kappa}$ per $\mathcal{L}^{CS}$, tali che quando $\mu \to +\infty$ risulta:*

1. $(A, \phi, N)^{\pm}_{\mu} \to ((\tilde{A}, \tilde{\phi})^{\pm}_{\kappa}, \frac{1}{\kappa}|\tilde{\phi}|^2)$, *in* $[L^2(\Omega)]^3 \times H^1(\Omega) \times L^p(\Omega)$ *e* $[L^2(\Omega)]^3 \times C^0(\Omega) \times L^p(\Omega)$, $\forall p \geq 1$;

2. *$(\tilde{A}, \tilde{\phi})^{\pm}_{\kappa}$ sono tali che quando $\kappa \to 0^+$, si ha $|\tilde{\phi}^+|^2 \to 1$ in $W^{1,q}(\Omega)$, $\forall q \in [1, 2)$ e uniformemente sui compatti di $\Omega \backslash P$; se $n = 1$, $\tilde{\phi}^- \to 0$ C^k-uniformemente, $\forall k \geq 0$.*

TEOREMA 3. – *Fissato $q^2 > 2\pi n$, siano $(A, \phi, N)^{\pm}_{\mu}$ i due P-vortici esistenti per il Teorema 0.1 per valori sufficientemente piccoli di μ. Sia $(A, \phi)_0$ l'unico P-*vortice per $\mathcal{L}^{AH}$. *Quando $\mu \to 0^+$, si ha:*

1. $(A, \phi)^+_{\mu} \to (A, \phi)_0$, $\nabla N^+ \to 0$, *C^k-uniformemente* $\forall k \geq 0$, $\mu \int N^+ \to q^2$;

2. $\phi^- \to 0$, $\nabla A_0^- = \nabla N^- \to 0$, $F_{12}^- \to -2\pi n$, *C^k-uniformemente* $\cup k \geq 0$, $\mu N^- \to 2\pi n$ *e* $\mu A_0 \to q^2 - 2\pi n$.

3. *Per valori piccoli di μ, i P-vortici $(A, \phi, N)^{\pm}_{\mu}$ sono unici. Inoltre, essi formano curve regolari parametrizzate da μ ed appartengono ad un insieme connesso di P-vortici.*

Il punto di partenza per le dimostrazioni dei Teoremi 1-3 è la seguente riduzione di Taubes, conseguenza dell'autodualità: se (u, N) risolve il sistema:

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} \Delta u = 2q^2 \mu e^u - 2\mu N + 4\pi \delta_P \\ \Delta N = (\mu^2 + 2q^2 e^u) N - q^2 \left(\mu + \dfrac{2q^2}{\mu} \right) e^u, \end{cases}$$

dove $\delta_P = \sum_{j=1}^{n} \delta_{p_j}$ e δ_{p_j} è la misura di Dirac concentrata in p_j, $j = 1, \ldots, n$, allora la configurazione (A, ϕ, N) definita ponendo:

$$\phi(x) = \exp\left\{ \frac{1}{2} u + i \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Arg}\left(\frac{x - p_j}{|x - p_j|} \right) \right\}$$

$$A_1 + iA_2 = i(\partial_1 + i\partial_2) \ln \phi$$

$$-A_0 = N - \frac{q^2}{\mu}$$

è un P-vortice.

La dimostrazione del Teorema 1 è variazionale. Posto $u = u_0 + v$, con u_0 la funzione di Green definita da $\Delta u_0 = 4\pi(\delta_P - n)$, $\int_\Omega u_0 = 0$, le soluzioni di (1) corrispondono ai punti critici nello spazio di Sobolev $H^2(\Omega)$ del funzionale

$$I(v) = \frac{1}{2\mu^2} \|\Delta v\|_2^2 + 2q^2 \int_\Omega (4\pi n - \Delta v)\, e^{u_0 + v} + \frac{1}{2} \|\nabla v\|_2^2 + q^2 \int_\Omega (e^{u_0 + v} - 1)^2 + 4\pi n \int_\Omega v\,.$$

Le due soluzioni corrispondono ad un minimo locale e ad un passo montano per I. La dimostrazione del Teorema 2 consiste nel mostrare mediante stime che nel limite CS la componente u di ogni soluzione (u, N) di (1) converge fortemente ad una soluzione dell'equazione

$$\Delta u = \frac{2q^2}{\mu} e^u (e^u - 1) + 4\pi\delta_P,$$

ottenuta da $\mathcal{L}^{CS}$ mediante la riduzione di Taubes. La stessa riduzione applicata a $\mathcal{L}^{AH}$ porta all'equazione:

(2) $$\Delta u = 2q^2 (e^u - 1) + 4\pi\delta_P.$$

In questo caso si può usare l'unica soluzione di (2) per ottenere un ramo di soluzioni di (1); l'analisi delle oscillazioni intorno alle medie delle soluzioni di (1) mostra l'esistenza di un altro ramo, che diverge per $\mu \to 0^+$. La connessione dei due rami segue da considerazioni di natura topologica, basati sul grado di Leray-Schauder. Questi risultati sono contenuti in [3]; essi migliorano alcuni risultati di Chae-Kim [1] ed estendono ad $\mathcal{L}$ i risultati ottenuti da Tarantello per $\mathcal{L}^{CS}$.

La seconda parte della tesi riguarda un problema unidimensionale motivato dall'analisi asintotica in [5] di vortici per $\mathcal{L}^{CS}$. Tale analisi riconduce allo studio del problema:

(3) $$\begin{cases} -\Delta w = \eta \left(\dfrac{Ke^w}{\int_\Omega Ke^w} - 1 \right) \\ \int_\Omega w = 0\,, \end{cases}$$

dove $K \geqslant 0$ è una funzione regolare e $\eta > 0$. Nel caso $K \equiv 1$, è di interesse determinare per quali valori di $\eta > 0$ il problema (3) ha soluzioni non nulle. Si osservi che in conseguenza della disuguaglianza di Moser-Trudinger:

$$\int_\Omega e^w \leqslant C \exp\left(\frac{1}{16\pi} \|\nabla w\|_2^2 \right), \qquad \forall w \in H^1(\Omega) : \int_\Omega w = 0\,,$$

dove C è indipendente da w e 16π è ottimale, il problema (3) perde di compattezza quando $\eta > 8\pi$. Struwe-Tarantello [4] hanno dimostrato che per ogni $\eta \in (8\pi, 4\pi^2)$ il problema (3) ammette una soluzione non nulla. Per chiarire la natura delle soluzioni ottenute in [4], si è studiato il corrispondente problema unidimensionale su $\mathbf{R}$:

$$\begin{cases} \ddot{u} = \eta \left(\dfrac{e^w}{\int_{-1/2}^{1/2} e^w} - 1 \right) \\ \int_{-1/2}^{1/2} w = 0 \\ w(t) = w(t+1), \qquad \forall t \in \mathbf{R}\,. \end{cases}$$

Si è dimostrato il seguente

TEOREMA 4. – *Il problema* (4) *ha soluzioni non nulle se e solo se* $\eta > \eta_1 = 4\pi^2$. *Inoltre, se* $\eta > \eta_k = 4k^2\pi^2$ *con* $k \in \mathbf{N}$, *allora* (4) *ha almeno k soluzioni non nulle e non ottenibili l'una dall'altra mediante traslazione.*

Conseguenza del Teorema 4 è che le soluzioni di Struwe-Tarantello sono strettamente bidimensionali, nel senso che non possono degenerare in soluzioni dipendenti da una sola variabile. La dimostrazione dell'esistenza è conseguenza della teoria di biforcazione di Crandall-Rabinowitz; l'unicità della soluzione banale al di sotto del primo autovalore segue da stime fortemente basate sulle proprietà algebriche della nonlinearità. Questo risultato è apparso in [2].

BIBLIOGRAFIA

[1] CHAE D. e KIM N., *Vortex Condensates in the Relativistic Self-Dual Maxwell-Chern-Simons-Higgs System*, preprint (1997).

[2] RICCIARDI T. e TARANTELLO G., *On a periodic boundary value problem with exponential nonlinearities*, Diff. Int. Equations, **11-5** (1998), 745-753.

[3] RICCIARDI T. e TARANTELLO G., *Selfdual vortices in the Maxwell-Chern-Simons-Higgs Theory*, preprint (1999).

[4] STRUWE M. e TARANTELLO G., *On multivortex solutions in Chern-Simons gauge theory*, Boll. UMI **1-B** (1998), 109-121.

[5] TARANTELLO G., *Multiple condensate solutions for the Chern-Simons-Higgs Theory*, J. Math. Phys., **37** (1996), 3769-3796.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Napoli «Federico II»
Via Cintia, Monte S. Angelo, 80126 Napoli
e-mail: tonia@matna1.dma.unina.it
Dottorato in Matematica Applicata e Informatica (sede amministrativa: Napoli) - Ciclo IX
Direttore di ricerca: Prof. Gabriella Tarantello, Università di Roma «Tor Vergata»