Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Marzia Rivi

Comportamento locale di sistemi dinamici discreti

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1S, p. 201–222.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_201_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. III-A, Supplemento ad Aprile 2000, 201-204

Comportamento locale di sistemi dinamici discreti.

MARZIA RIVI

Lo studio svolto nella tesi di dottorato è dedicato al comportamento asintotico di alcuni *sistemi dinamici discreti olomorfi*, ciascuno dei quali è, per definizione, la successione $\{F^n\}_n$ delle iterate di una trasformazione olomorfa $F: \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$.

In particolare si vuole determinare l'insieme su cui la successione, determinata da F, converge a uno stesso punto al divergere di n. Poiché tale limite deve essere un punto fisso per la mappa, inizialmente lo studio può essere limitato ad un intorno dei punti fissi di F. Nella tesi si sono considerati germi di trasfomazioni olomorfe di $\mathbb{C}^m$ con punto fisso l'origine. L'insieme di tali germi sarà denotato con $\mathrm{End}(\mathbb{C}^m, 0)$.

Per ogni punto $x \in \mathrm{Dom}(F)$, l'insieme $O^+(x) = \bigcup_{n>0} F^n(x)$ è detto *orbita (in avanti)* di x. Allora ci si pone il seguente:

PROBLEMA *Sia* $F \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^m, 0)$, *stabilire se esiste un sottoinsieme* $D \subseteq \mathbb{C}^m$ *non vuoto, connesso, F-invariante* (*cioè* $F(D) \subseteq D$), *su cui la successione* $\{F^n\}_n$ *converge a 0 e tale che D sia o aperto* (*in tal caso si dice che è un* DOMINIO ATTRATTIVO *di* 0) *o almeno una sottovarietà complessa locale di* $\mathbb{C}^m$ (*detta* VARIETÀ STABILE).

Il suddetto problema è completamente risolto nel *caso iperbolico*, cioè quando tutti gli autovalori di $dF(0)$ hanno modulo diverso da 1: indicando con E_1 (risp. E_2) l'autospazio generalizzato associato agli autovalori con modulo minore di 1 (risp. maggiore di 1), esiste una varietà stabile W^s ed una instabile W^u (cioè stabile per F^{-1}) che si intersecano trasversalmente in 0, dove sono rispettivamente tangenti ad E_1 ed E_2 ([7], p. 27).

Il Teorema della Varietà Centro-Stabile ([7], p. 32), garantisce inoltre che la varietà stabile, corrispondente agli autovalori in modulo minore 1, esiste anche quando gli altri autovalori di $dF(0)$ hanno tutti modulo unitario.
Nel caso non-iperbolico la soluzione è completa solo in dimensione 1 (vedi [2] e [5]): sia

$$F(z) = \lambda z + a_{k+1} z^{k+1} + \cdots, \qquad |\lambda| = 1 ;$$

a) se $\lambda = 1$ allora esistono $P_1, \ldots P_k$ domini attrattivi disgiunti con $0 \in \partial P_i$ per ogni $i = 1, \ldots, k$ (detti *petali attrattivi*) ed esistono $P_1', \ldots, P_k'$ petali repulsivi (cioè attrattivi per F^{-1}) disgiunti, che si alternano l'un l'altro in modo che P_i interseca P_{i-1}' e P_i' (dove $P_0' = P_k'$). Inoltre all'interno di ciascun petalo attrattivo (risp. repulsivo) le orbite in avanti (risp. all'indietro) convergono a 0 tangenzialmente ad una direzione bisecante il petalo.

b) Se $\lambda \neq 1$ ma $\lambda^s = 1$, allora il ragionamento precedente vale per F^s e quindi F agisce come una permutazione di petali in cicli di lunghezza s.

c) Se $\lambda^s \neq 1$ per ogni $s \in \mathbb{N}$, allora non ci sono orbite convergenti a 0 eccetto per i punti di $O^-(0)$.

In dimensione più alta si hanno risultati parziali quando $sp(dF(0)) = \{1\}$ oppure $sp(dF(0)) = \{1, \beta_1, \ldots, \beta_k\}$ con $|\beta_i| < 1$ per ogni $i = 1, \ldots, k$ (*caso semi-attrattivo*).

Nel primo caso i risultati riguardano una convergenza delle orbite di tipo tangenziale, cioè tale che, al divergere di n, $F^n(x) \to 0$ e $[F^n(x)] \to [V]$ in $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$, dove $[\ ]$ denota la proiezione canonica nello spazio proiettivo complesso $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ e $V \in \mathbb{C}^m$, $V \neq 0$ è una direzione complessa detta *tangente* all'orbita di x nell'origine. M. Hakim [4], ha trattato il caso in cui $dF(0) = I$ osservando che per tali mappe un ruolo importante è svolto dalle direzioni invarianti rispetto la parte quadratica di F (nell'ipotesi che il polinomio omogoneo di secondo grado P_2 dello sviluppo in serie di F non sia identicamente nullo), dette *direzioni caratteristiche*. Infatti una condizione necessaria affinché una direzione sia tangente ad un'orbita in 0 è che essa sia caratteristica. Inoltre, ad ogni direzione caratteristica non degenere V (cioè tale che $P_2(V) \neq 0$), si possono associare degli invarianti rispetto a cambiamenti locali di coordinate che preservano l'origine e le direzioni caratteristiche. Tali invarianti sono gli autovalori della matrice $A(V) = d\widetilde{P}_2[V] - I$, dove $\widetilde{P}_2 : [X] \to [P_2(X)]$ è la proiezione del polinomio omogeneo P_2 in $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ definita in un intorno di $[V]$ (che è un punto fisso per definizione). Hakim ha dimostrato che se $A(V)$ ha d autovalori con parte reale strettamente positiva $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$, allora esiste una varietà stabile M di dimensione $d+1$ con l'origine sul bordo e tangente a $\mathbb{C}V \oplus E$ in 0, dove E è l'autospazio generalizzato associato agli autovalori $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$, e le orbite di ogni punto di M convergono a 0 tangenzialmente a V; in particolare esiste sempre una curva stabile Γ tangente a V in $0 \in \partial\Gamma$ e, quando tutti gli autovalori di $A(V)$ hanno parte reale strettamente positiva esiste un dominio attrattivo di 0.

Se invece $dF(0)$ è in forma canonica di Jordan ci si può ricondurre al caso precedente grazie a un risultato di M. Abate [1], il quale ha provato l'esistenza di una varietà complessa m-dimensionale M e di una proiezione olomorfa $\pi : M \to \mathbb{C}^m$ che coniuga F a un germe in $\pi^{-1}(0)$ di mappe olomorfe $\widetilde{F} : M \to M$, che ammette un punto fisso canonico e nel quale il differenziale $d\widetilde{F}(e)$ è l'identità. Studiando $\widetilde{F}$ ha dimostrato che, per F generica, esiste una sola direzione caratteristica non degenere e non tangente a $\pi^{-1}(0)$, e quindi la corrispondente curva $\widetilde{F}$-stabile, la cui esistenza è garantita dal teorema di Hakim, si proietta tramite π in una curva stabile per F con l'origine sul bordo.

Il caso semi-attrattivo è stato studiato principalmente da T. Ueda [6] (in dimensione 2) e da M. Hakim [3] quando la molteplicità algebrica dell'autovalore 1 sia 1. In tal caso si è dimostrato che o esiste una curva di punti fissi passante per l'origine, oppure esistono $k-1$ petali attrattivi, dove $k \geqslant 2$ è la molteplicità di 0 come punto fisso.

Nella tesi è stato invece considerato il caso semi-attrattivo quando la molteplicità algebrica e geometrica dell'autovalore 1 coincidono e sono maggiori di 1. Un primo risultato è stato quello di determinare un sistema di coordinate locali (w, z)

rispetto al quale F si «spezzi» in due componenti, dove la prima è essenzialmente una mappa in w (fino all'ordine $k > 2$) tangente all'identità, e la seconda è una contrazione nella variabile z.

PROPOSIZIONE 1. – *Sia $F \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^m, 0)$ semi-attrattivo tale che l'autovalore* 1 *del differenziale $dF(0)$ abbia molteplicità algebrica e geometrica $q > 1$. Allora per ogni $k \in \mathbb{N}$, esiste un sistema locale di coordinate $(w, z) \in \mathbb{C}^q \times \mathbb{C}^{m-q}$ tale che, in un intorno dell'origine, F assume la forma*

$$\begin{cases} w_1 = w + P_2(w) + \cdots + P_{k-1}(w) + P_{k,z}(w) + \cdots \\ z_1 = G(z) + B(w, z)\, w\,, \end{cases} \tag{1}$$

dove P_i (risp. $P_{i,z}$) è un polinomio omogeneo in $\mathbb{C}^q$ di grado i (risp. i cui coefficienti sono funzioni olomorfe nella variabile z), $G \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^{m-q}, 0)$ con differenziale $dG(0)$ avente tutti gli autovalori in modulo minori di 1*, e $B(w, z)$ è una matrice $(m-q) \times q$ i cui elementi sono funzioni olomorfe di $\mathbb{C}^m$ e $B(0, 0) = 0$.*

Per il Teorema della Mappa Implicita, ne consegue allora la seguente

PROPOSIZIONE 2. – *Sia F come in Proposizione* 1, *allora o esiste una varietà complessa q-dimensionale di punti fissi per F, oppure esiste un intero $k > 2$ tale che F assume la forma* (1) *con $P_{k-1} \neq 0$.*

Nel caso in cui $P_2 \neq 0$, applicando la teoria di Hakim alla prima componente dell'espressione (1), è stato dimostrato il seguente

TEOREMA 1. – *Sia $F \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^m, 0)$ semi-attrattivo nella forma* (1) *con $P_2 \neq 0$ e $k > 3$. Se V è una direzione caratteristica non degenere di P_2, allora esiste una varietà stabile M di dimensione $m - q + 1$ con l'origine sul bordo e tangente a $\mathbb{C}V \oplus E$, dove E è l'autospazio generalizzato associato agli autovalori di $dF(0)$ in modulo minore di* 1. *Inoltre per ogni punto x di M le prime q componenti dell'orbita di x convergono tangenzialmente a V.*

Tale varietà è stata ottenuta come grafico di una trasformazione olomorfa

$$u : D_r^+ \times \Delta_\delta^{m-q} \to \mathbb{C}^{q-1},$$

$$D_r^+ = \{x \in \mathbb{C} \mid |x - r| < r\}, \qquad \Delta_\delta^{m-q} = \{z \in \mathbb{C}^{m-q} \mid \|z\| < \delta\},$$

tale che $\lim_{(x,z)\to 0} u(x, z) = 0$. La condizione di F-invarianza per il grafico di u consente di determinare la mappa u come punto fisso di un opportuno operatore tra spazi di Banach. Dimostrando allora che tale operatore risulta essere una contrazione su un particolare sottoinsieme chiuso si prova l'esistenza della varietà stabile. Inoltre la condizione di Hakim ristretta alla prima componente di F garantisce ancora l'esistenza di un dominio attrattivo cioè vale il seguente

TEOREM 2. – *Sia $F \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^m, 0)$ semi-attrattivo nella forma* (1) *con $P_2 \neq 0$ e $k > 3$. Se V è una direzione caratteristica non degenere di P_2 la cui* *matrice associata ha tutti gli autovalori con parte reale strettamente positiva, allora esiste un dominio attrattivo D dell'origine, con $0 \in \partial D$.*

La teoria di Hakim, oltre a fornire un valido strumento per lo studio di questo caso semi-attrattivo, ha anche aperto nuovi quesiti riguardo la dinamica di mappe olomorfe tangenti all'identità. In particolare è interessante stabilire se ci può essere convergenza tangenziale anche lungo direzioni caratteristiche degeneri e se esistono altre condizioni che garantiscono l'esistenza di domini attrattivi. Poiché i risultati ottenuti per mappe F con $dF(0) = I$ dipendono solo dalle parte quadratica di F, al fine di trovare esempi significativi di comportamenti alternativi a quelli già noti, è stata determinata una classificazione dei polinomi quadratici di $\mathbb{C}^2$ con punto fisso l'origine e tangenti a I in 0, a meno di coniugazioni mediante automorfismi di $\mathbb{C}^2$; successivamente si sono studiate alcune mappe della lista ottenuta determinando varie informazioni sulla dinamica locale e globale del sistema. In particolare: la mappa $F(z, w) = (z + zw + w^2, w + w^2)$, pur non avendo direzioni caratteristiche non degeneri, ammette un dominio attrattivo; la famiglia $F_\alpha(z, w) = (z + \alpha zw, w + w^2)$, con $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, ammette un dominio attrattivo, se $\Re e\alpha > 0$, nel quale le orbite convergono tangenzialmente ad una direzione caratteristica degenere se $0 < \Re e\alpha < 1$, non tangenzialmente ma lungo una spirale se $\Re e\alpha = 1$, $\alpha \neq 1$, oppure (in accordo con il risultati di Hakim) tangenzialmente ad una direzione caratteristica non degenere se $\Re e\alpha > 1$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Abate M., *Diagonalization of non-diagonalizable discrete holomorphic dynamical systems*, Preprint (1999).

[2] Carleson L. e Gamelin T. W., *Complex Dynamics*, Springer-Verlag, Berlin (1993).

[3] Hakim M., *Attracting domains for semi-attractive transformations of $\mathbb{C}^p$*, Pubblications Mathématiques, **38** (1994), 479-499.

[4] Hakim M., *Transformations tangent to the Identity. Stable piece of manifolds*, Preprint (1998).

[5] Pérez-Marco R., *Fixed points and circle maps*, Acta Math., **179** (1997), 243-294.

[6] Ueda T., *Local structure of analytic transformations of two complex variables I*, J. Math. kyoto Univ., **26-2** (1986), 233-261.

[7] Ruelle D., *Elements of Differential Dynamics and Bifurcation Theory*, Academic Press Boston (1989).

Dipartimento di Matematica «Ulisse Dini», Università di Firenze
Viale Morgagni, 67a I-50134 Firenze
e-mail: rivi@math.unifi.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Firenze) - Ciclo X
Direttore di ricerca: Prof. Marco Abate, Università di Roma «Tor Vergata»