Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Olivia Rossi-Doria

Matrici simmetriche quantiche e teoria delle rappresentazioni

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1S, p. 205–208.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_205_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. III-A, Supplemento ad Aprile 2000, 205-208

Matrici simmetriche quantiche e teoria delle rappresentazioni.

Olivia Rossi-Doria

La tesi introduce un'analogo quantico dell'algebra delle funzioni sulle matrici simmetriche, e ne studia le proprietà come rappresentazione del quantum group $\mathcal{U}_q(\mathfrak{gl}(n))$. Da un lato guarda dunque allo studio classico dell'algebra delle funzioni di matrici e dei suoi ideali $\mathfrak{gl}(n)$-invarianti, dall'altro alla teoria dei quantum groups e delle loro rappresentazioni.

In [1] viene affrontato lo studio dell'algebra $\mathbb{C}[u_{i,j}]$ delle matrici $n \times m$ come rappresentazione del gruppo $G = Gl(n) \times Gl(m)$ mediante l'uso dei diagrammi di Young e lo studio di determinati prodotti di minori. Essi sono una base per $\mathbb{C}[u_{i,j}]$ con proprietà molto buone rispetto all'azione di G. Le tecniche possono essere adattate ai casi particolari delle matrici simmetriche ed antisimmetriche.

L'interesse per il caso non commutativo è strettamente legato alla teoria dei quantum groups. Seguendo Jimbo [2], ricordiamo che l'algebra inviluppante quantizzata $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ è definita per generatori e relazioni come deformazione, dipendente dal parametro di deformazione q, dell'algebra inviluppante universale $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ di un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$. Nel caso $q = 1$ ritroviamo le relazioni di Serre per $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

La generalizzazione delle matrici generiche al caso non commutativo è ben nota, si veda per esempio il lavoro di Parshall Wang [3]. Le matrici antisimmetriche quantiche sono state introdotte in [4].

Per quel che riguarda le matrici simmetriche è ben noto che nel caso classico l'anello delle coordinate su una generica matrice simmetrica $n \times n$ è isomorfo all'algebra simmetrica della rappresentazione $S^2(V)$ di $GL(V)$, dove $n = \dim V$. Introduciamo allora le matrici simmetriche quantiche mediante l'algebra delle funzioni q-polinomiali su di esse, dunque mediante l'analogo quantico dell'algebra simmetrica per la rappresentazione corrispondente di $\mathcal{U}_q(\mathfrak{gl}(n))$.

Abbiamo quindi bisogno di definire l'algebra simmetrica quantica $S_q(V)$ per una rappresentazione V di $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$, e lo facciamo in modo da avere un'algebra che sia un buon q-analogo dell'algebra simmetrica di una rappresentazione di un'algebra di Lie, ovvero traducendo le proprietà caratterizzanti di tale algebra per una rappresentazione di $\mathfrak{g}$ al caso di una rappresentazione di $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$. In particolare chiediamo che $S_q(V)$ sia un'algebra di twisted polynomials, cioé un'algebra graduata con dimensione in ogni grado pari a quella della corrispondente algebra dei polinomi nei generatori. Non è affatto detto che sia possibile costruire $S_q(V)$ per ogni rappresentazione V di $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$. Anzi si ha già un controesempio nel caso della rappresentazione 4-dimensionale V_3 di $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(2))$. Ma quando esiste $S_q(V)$ ci dà un'algebra di polinomi non commutativi, uno spazio quantico di cui studiare la geometria. Ad esempio il piano quantico è un'algebra simmetrica quantica, così come l'algebra delle q-matrici e l'algebra delle matrici antisimmetriche quantiche. La non commutatività dell'algebra $S_q(V)$ deriva naturalmente dal fatto che su di essa vogliamo un'azione dell'algebra di Hopf non cocommutativa $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$.

Nel caso della rappresentazione di $\mathcal{U}_q(\mathfrak{gl}(n))$ corrispondente a $S^2(V)$ si prova che l'algebra simmetrica quantica $S_q(S^2(V))$ esiste. Siamo allora in grado di dare la seguente

DEFINIZIONE 1. – La matrice $n \times n$ $X = (x_{i,j})$, con $x_{i,j} = x_{j,i}$ se $i > j$, si dice matrice simmetrica quantica se i suoi coefficienti soddisfano le seguenti relazioni di q-commutatività

$$\begin{aligned}
&x_{i,j}x_{h,k} = q^{-2}x_{h,k}x_{i,j} && \text{per } h < i = j = k \text{ e } i = h = k < j\\
&x_{i,j}x_{h,k} = x_{h,k}x_{i,j} + (q^{-1} - q^3)x_{i,h}^2 && \text{per } h = k < i = j\\
&x_{i,j}x_{h,k} = q^{-1}x_{h,k}x_{i,j} && \text{per } i = h < k < j \text{ e } h < i < j = k\\
&x_{i,j}x_{h,k} = x_{h,k}x_{i,j} + (q^{-2} - q^2)x_{i,h}x_{j,k} && \text{per } h < k < i = j \text{ e } h = k < i < j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&x_{i,j}x_{h,k} = x_{h,k}x_{i,j} && \text{per } h < i \leqslant j < k\\
&x_{i,j}x_{h,k} = q^{-1}x_{h,k}x_{i,j} + (q^{-2} - 1)\,x_{h,j}x_{i,k} && \text{per } h < k = i < j\\
&x_{i,j}x_{h,k} = x_{h,k}x_{i,j} + (q^{-1} - q)\,x_{h,j}x_{i,k} && \text{per } h < i < k < j\\
&x_{i,j}x_{h,k} = x_{h,k}x_{i,j} + (q^{-1} - q)\,x_{h,i}x_{k,j} + (q^{-2} - 1)\,x_{h,j}x_{k,i} && \text{per } h < k < i < j\,.
\end{aligned}$$

Sul modello del lavoro di De Concini Eisenbud Procesi [1] studiamo la decomposizione di $S_q(S^2(V))$ in sottorappresentazioni irriducibili per $\mathcal{U}_q(\mathfrak{gl}(n))$, e la struttura dei suoi ideali $\mathcal{U}_q(\mathfrak{gl}(n))$-invarianti.

TEOREMA 1. – La componente omogenea A_m di $S_q(S^2(V))$ si decompone come rappresentazione di $\mathcal{U}_q(\mathfrak{gl}(n))$ in somma diretta di irriducibili

$$A_m = \oplus_\sigma M_\sigma$$

dove σ è un diagramma di Young con $2m$ caselle, colonne di lunghezza pari e righe di lunghezza $\leqslant n$, ed M_σ è isomorfo al modulo irriducibile $L_\sigma(V)$ di $\mathcal{U}_q(\mathfrak{gl}(n))$ associato a σ.

TEOREMA 2. – L'ideale I_σ, minimo $\mathcal{U}_q(\mathfrak{gl}(n))$-invariante contenente l'irriducibile M_σ, si decompone in somma di $\mathcal{U}_q(\mathfrak{gl}(n))$-moduli irriducibili

$$I_\sigma = \bigoplus_{\tau \supseteq \sigma} M_\sigma$$

dove τ ha colonne di lunghezza pari e prima riga di lunghezza $\leqslant n$.

Una definizione alternativa delle matrici simmetriche quantiche può essere data nel modo seguente. È ben noto che moltiplicando una matrice $n \times m$ A per la sua trasposta si ottiene una matrice simmetrica. Essa è la matrice dei prodotti scalari degli n vettori riga m-dimensionali di A, dove il prodotto scalare è quello simmetrico standard dato dalla matrice identità. Allora per un'opportuna nozione di q-prodotto scalare simmetrico possiamo considerare la matrice dei q-prodotti scalari dei vettori riga di una q-matrice. Otteniamo così esattamente una matrice simmetrica quantica secondo la Definizione 1. In particolare questo ci permette di caratterizzare facilmente gli ideli primi $\mathcal{U}_q(\mathfrak{gl}(n))$-invarianti di $S_q(S^2(V))$ come tutti e soli gli ideali I_k per $1 \leqslant k \leqslant n$, associati rispettivamente ai diagrammi di Young composti da due righe di lunghezza k. Analogamente definiamo un q-prodotto scalare antisimmetrico e ritroviamo le matrici antisimmetriche quantiche (cfr. [4]). Da notare è che, diversamente da quel che avviene nel caso commutativo, la definizione tramite prodotto scalare delle matrici simmetriche ed antisimmetriche dipende fortemente dal q-prodotto scalare scelto.

Infine, dato il ruolo essenziale del determinante di una matrice nello studio classico dell'algebra delle sue funzioni polinomiali, vogliamo trovare una formula per il suo analogo quantico nel caso delle matrici simmetriche. Naturalmente in modo che per $q = 1$ si ritrovi il determinante classico di una matrice simmetrica. Come è noto esso è vettore peso più alto, per l'azione di $\mathfrak{gl}(n)$ sull'algebra $\mathbb{C}[x_{i,j}]$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, dell'irriducibile associato al diagramma di Young ϱ composto da due sole righe di lunghezza n. La formula per il q-determinante deve dunque essere data in modo che esso risulti vettore peso più alto dell'irriducibile corrispondente nell'algebra $S_q(S^2(V))$ per l'azione di $\mathcal{U}_q(\mathfrak{gl}(n))$. La difficoltà rispetto al caso delle q-matrici è data dal fatto che $\mathcal{U}_q(\mathfrak{gl}(n))$ agisce su entrambi gli indici i, j delle variabili $x_{i,j}$, ed un calcolo esplicito non è gestibile a causa della forma delle relazioni di q-commutatività. Nemmeno ci aiuta l'osservazione che, considerando la definizione di matrice simmetrica quantica data come prodotto di una q-matrice per la sua trasposta, non è difficile vedere che il suo q-determinante, per ragioni di pesi, deve essere uguale al quadrato del q-determinante della q-matrice di partenza. Né ci aiuta l'analogo quantico della formula di espansione di Laplace, che pure si può scrivere per un'opportuna definizione dei minori della q-matrice simmetrica. Siamo comunque in grado di dimostrare che il q-determinante della matrice simmetrica quantica $n \times n$ X si può scrivere nella seguente elegante forma

$$det_q(X) = \sum_{\sigma \in S_n} (-q)^{l(\sigma) + 2r(\sigma)} x_{1,\sigma(1)} \ldots x_{n,\sigma(n)},$$

dove, per una permutazione $\sigma \in S_n$, la lunghezza $l(\sigma)$ è data dal numero di coppie (i, j) tali che $1 \leqslant i < j \leqslant n$ e $\sigma(i) > \sigma(j)$, ed $r(\sigma)$ è la cardinalità dell'insieme $\{i \mid \sigma(i) < i\}$.

La dimostrazione che questo è effettivamente il vettore peso più alto voluto si fa dimostrando che se un tale vettore D esiste deve essere un multiplo di quello dato. Sappiamo che esso deve essere un elemento del sottospazio A_n^0 di peso zero per i $G_i G_{i+1}^{-1} \in \mathcal{U}_q(\mathfrak{gl}(n))$ nella componente omogenea A_n di grado n in $S_q(S^2(V))$.

Gli elementi di A_n^0 sono i q-polinomi nei monomi di grado n in cui ciascun indice $i = 1, \ldots, n$ compare esattamente due volte. Si dimostra che una base di A_n^0 è data dai q-polinomi $P(C_{\sigma_i}) = \sum_{\sigma \in C_{\sigma_i}} (-q)^{l(\sigma) + 2r(\sigma)} x_{1, \sigma(1)} \ldots x_{n, \sigma(n)}$, dove le C_{σ_i} sono classi di equivalenza di monomi non commutativi corrispondenti allo stesso monomio commutativo, e i σ_i sono loro rappresentanti. Essi sono ordinati secondo l'ordine lessicografico dei corrispondenti monomi commutativi. Ora, gli operatori $E_i \in \mathcal{U}_q(\mathfrak{gl}(n))$, che vogliamo di autovalore nullo sul nostro D, mandano A_n^0 nel sottospazio A_n^i di A_n di peso $2\omega_i - \omega_{i-1} - \omega_{i+1}$ per i $G_j G_{j+1}^{-1}$. Per ogni $i = 1, \ldots, n$ possiamo trovare una base di A_n^i compatibile con quella data per A_n^0, nel senso che la matrice di E_i scritta in tali basi sia una matrice a blocchi. Si mostra poi che, fissato i, esistono alcuni blocchi particolari che si annullano su un vettore di A_n^0 se e soltanto se esso ha nella base data dai $P(C_\sigma)$ lo stesso coefficiente per tutti gli elementi della base nello stesso blocco. Inoltre si ha che per ogni $P(C_\sigma)$ esiste un E_i che si scrive a blocchi in modo che $P(C_\sigma)$ sia nello stesso blocco di un $P(C_\tau)$ più piccolo di $P(C_\sigma)$, e che tale blocco abbia la proprietà detta. Allora per induzione sull'ordine dei $P(C_\sigma)$ si dimostra che, fissato uguale ad 1 il coefficiente di $P(C_{id})$ per D, tutti gli altri coefficienti di D devono essere uguali ad 1, e si ha la formula data.

Per considerazioni di tipo generale infine sappiamo che esiste un q-polinomio in $S_q(S^2(V))$ a coefficienti in $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$ che è vettore peso più alto per la rappresentazione corrispondente a ϱ, e la dimostrazione è completa.

BIBLIOGRAFIA

[1] De Concini C., Eisenbud D. e Procesi C., *Young Diagrams and Determinantal Varieties*, Inv. Math., **56** (1980), 129-165.

[2] Jimbo M., *A q-difference analogue of* $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ *and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys., **10** (1985), 63-69.

[3] Parshall B. e Wang J., Quantum Linear Groups (Memoirs of AMS 439, 1991).

[4] Strickland E., *Classical Invariant Theory for the Quantum Symplectic Group*, Adv. in Math., **123** (1996), 78-90.

Dipartimento di Matematica, Università di Strasburgo «Louis Pasteur»
e-mail: rossidor@math.u-strasbg.fr
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Roma) - Ciclo X
Direttore di ricerca: Prof. Claudio Procesi, Università di Roma «La Sapienza»