Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Ariela Briani

Equazioni di Hamilton-Jacobi-Bellman e Γ-convergenza per problemi di controllo ottimo

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1S, p. 29–32.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_29_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. III-A, Supplemento ad Aprile 2000, 29-32

Equazioni di Hamilton-Jacobi-Bellman e Γ-convergenza per problemi di controllo ottimo.

Ariela Briani

Nella tesi di dottorato studiamo la convergenza di successioni di problemi di controllo ottimo di diverso tipo. Le tecniche che utilizziamo sono la Γ-convergenza e la teoria delle soluzioni di viscosità per equazioni di Hamilton-Jacobi-Bellmann (d'ora in poi (HJB)). Più precisamente consideriamo successioni di problemi di controllo ottimo della forma

$$\min \left\{ \int_0^T f_n(t, y, u)\, dt : (y, u) \in \mathcal{A}_n \right\} \tag{1}$$

dove

$$\mathcal{A}_n = \{(y, u) \in Y \times \mathcal{U} : y'(t) = a_n(t, y) + B_n(t, u),\ y(0) = y_0^n\}, \tag{2}$$

$Y = W^{1,1}(0, T; R^n)$ è lo spazio degli stati e $\mathcal{U} = L^2(0, T; R^m)$ è lo spazio dei controlli.

La teoria della Γ-convergenza per questi problemi ed alcuni più generali, di cui parleremo più avanti, è stata sviluppata negli ultimi anni in lavori di Buttazzo e Freddi ([3], [4]). Ricordiamo qui che il problema $(\mathcal{P})$, Γ-limite di una successione di problemi di controllo $(\mathcal{P}_n)$, è, detto in modo informale, un problema tale che:

i) la successione dei controlli ottimali (u_n) di $(\mathcal{P}_n)$ converge al controllo ottimale u di $(\mathcal{P})$;

ii) la successione delle traiettorie ottimali (y_n) di $(\mathcal{P}_n)$ converge alla traiettoria ottimale y di $(\mathcal{P})$.

Nel caratterizzare il Γ-limite $(\mathcal{P})$ si è dimostrato che è il tipo di convergenza delle funzioni $B_n(t, u)$ a influenzare il modo determinante la struttura del problema limite. Più precisamente in [4] si distingue fra due tipi di convergenza; diremo che i $B_n(t, u)$ convergono *forte* a $B(t, u)$ se: se $u_n \to u$ debolmente in $L^2(0, T; R^m)$ allora $B_n(t, u_n) \to B(t, u)$ in un opportuno spazio topologico V, diremo che convergono *debolmente* se: se $u_n \to u$ debolmente in $L^2(0, T; R^m)$ allora la successione $B_n(t, u_n)$ è relativamente compatta in un opportuno spazio topologico V.

Scegliendo come spazio V lo spazio $L^\infty(0, T; R^n)$ munito della topologia debole*, in [4] Buttazzo e Freddi dimostrano che se le funzioni $B_n(t, u)$ convergono fortemente il problema limite $(\mathcal{P})$ ha la stessa forma dei problemi $(\mathcal{P}_n)$, mentre se le funzioni $B_n(t, u)$ convergono solo debolmente nel problema limite l'equazione di stato scompare ed è sostituita da un termine nell'integrando del funzionale costo.

Poiché questo fenomeno è in qualche modo sorprendente la prima idea è stata studiare il comportamento delle equazioni di (HJB) di questi problemi. Così abbiamo sviluppato la teoria delle soluzioni di viscosità per equazioni di (HJB) associate a problemi del tipo (1)-(2). Sono equazioni della forma:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial t}v(t, x) + H(t, x, Dv(t, x)) = 0 \quad \text{in } (0, T) \times R^n \\ v(T, x) = 0 \quad \text{in } R^n \end{cases} \tag{3}$$

dove l'Hamiltoniana è data da

$$H(t, x, p) = \sup_{u \in R^m} \{ -p \cdot B(t, u) - f(t, x, u) \} - p \cdot a(t, x) . \tag{4}$$

Le ipotesi principali che differenziano questo caso da quelli studiati in letteratura sono la sola misurabilità in t dell'Hamiltoniana e la non limitatezza dei controlli u (si veda [2]). Per questo non è stato possibile applicare i risultati noti di esistenza ed unicità ma li abbiamo dimostrati direttamente. Abbiamo quindi potuto osservare che le Hamiltoniane associate ai problemi $(\mathcal{P}_n)$ convergono all'Hamiltoniana del problema Γ-limite $(\mathcal{P})$ sia nel caso di convergenza forte che nel caso di convergenza debole delle $B_n(t, u)$.

In particolare abbiamo sviluppato nei dettagli il caso lineare-quadratico in dimensione $n = m = 1$, i.e. $B_n(t, u) = b_n(t)\, u(t)$ e $f_n(t, y, u) = g(y) + \frac{1}{2}|u|^2$. Il vantaggio è che per questi problemi l'Hamiltoniana può essere calcolata in modo esplicito:

$$H(t, x, p) = -pa(t, x) - g(x) + \frac{1}{2} p^2 b_n^2(t) . \tag{5}$$

Scegliendo $V = L^\infty(0, T; R)$ le ipotesi di convergenza forte e debole diventano per la successione b_n rispettivamente, $b_n(\cdot) \to b(\cdot)$ quasi ovunque in $(0, T)$ e $b_n(\cdot) \to b(\cdot)$ debole* in $L^\infty(0, T; R)$. Ma, poichè i controlli sono in $L^2(0, T; R)$, l'ipotesi più naturale sarebbe $b_n(\cdot) \to b(\cdot)$ debole in $L^2(0, T; R)$. Per verificare l'ipotesi di convergenza debole bisogna scegliere allora come spazio V lo spazio delle misure $\mathcal{M}(0, T; R)$.

Nel Γ-limite appaiono dunque le misure, e per caratterizzalo bisogna supporre $b_n^2(\cdot) \to \mu$ debole* in $\mathcal{M}(0, T; R)$. (Si veda [3]). Così l'Hamiltoniana del problema limite dovrebbe essere la seguente:

$$H(t, x, p) = -pa(t, x) - g(x) + \frac{1}{2} p^2 \mu . \tag{6}$$

Poiché la presenza di una misura nell'Hamiltoniana è qualcosa di nuovo abbiamo studiato nei dettagli un esempio ($a(t, x) = 0$, $b_n(t) = 1_{[1, 1+1/n]}$, $g(x) = |x|^2$). Partendo da questo abbiamo dato una definizione di soluzione di viscosità che si basa sull'idea delle così dette «riparametrizzazioni» introdotta per equazioni differenziali ordinarie. (In particolare ci siamo riferiti a [5]). Con questa tecnica infatti, possiamo associare in modo biunivoco, ad ogni problema limite con la misura un problema che chiamiamo «riparametrizzato» in cui la misura non appare. L'equazione di (HJB) associata a quet'ultimo è del tipo (3), la teoria sviluppata in precedenza ci garantisce dunque l'esistenza e l'unicità della soluzione.

Per dimostrare la corrispondenza biunivoca fra i problemi con e senza misure abbiamo infine dimostrato una formula di cambiamento di variabile in dimensione 1 per derivate distribuzionali di funzioni a variazione limitata che sono la composta di una funzione assolutamente continua e di una funzione strettamente crescente.

Nell'ultima parte della tesi abbiamo considerato problemi di controllo in cui l'equazione di stato è un'equazione alle derivate parziali. La teoria della Γ- convergenza per questo tipo di problemi è stata sviluppata in [4]. Si tratta di problemi di controllo del tipo (1), in cui le coppie (y, u) dell'insieme $\mathcal{A}_n$ possono però essere soluzione di una generica equazione $A_n(y) = B_n(u)$ dove $A_n \colon Y \to V$ e $B_n \colon \mathcal{U} \to V$ sono operatori rispettivamente dallo spazio degli stati Y e dallo spazio dei controlli $\mathcal{U}$ in un terzo spazio topologico V.

Abbiamo applicato questa teoria per studiare successioni di problemi di controllo frontiera in cui lo stato è un'equazione alle derivate parziali di tipo parabolico. Più precisamente abbiamo considerato la successione di problemi di controllo con stato y_ε soluzione di

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y_\varepsilon}{\partial t}(t, x) - \displaystyle\sum_{i, j=1}^{n} D_i(a_{i,j}(x)\, D_j y_\varepsilon(t, x)) = 0 & \text{in } [0, T] \times \overline{\Omega} \\ \varepsilon \left(\displaystyle\sum_{i, j=1}^{n} a_{i,j}(x) \cdot D_j y_\varepsilon(t, x)\, \nu_i(x) \right) + y_\varepsilon(t, x) = u(t, x) & \text{in } [0, T] \times \partial\Omega \\ y_\varepsilon(0, x) = y_0(x) & \text{in } \overline{\Omega} \end{cases}$$

e costo

$$(8) \qquad J(y, u) = \int_0^T (\|u(s, \cdot)\|^2_{L^2(\partial\Omega;\, C^n)} + \|y(s, \cdot)\|^2_{L^2(\Omega;\, C^n)})\, dt\,.$$

Utilizzando al formula di rappresentazione per la soluzione di (7) in [1] abbiamo dimostrato l'applicabilità dei risultati di Γ-convergenza (caso di convergenza forte) ed ottenuto che il problema Γ-limite è un problema con equazione (7) ma condizione di Dirichlet puro al bordo (i.e. $y(t, x) = u(t, x)$) e stesso costo. Osserviamo che l'interesse di questo tipo di approssimazione è dovuta al fatto che spesso i dati al bordo sono trattati numericamente con approssimazioni di questo tipo.

Infine, abbiamo dimostrato una formula di rappresentazione analoga a quella in [1] per un'equazione parabolica con controllo frontiera ma condizione mista al bordo, i.e.

$$
(9) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t}(t, x) - \sum\limits_{i, j=1}^{n} D_i(a_{i,j}(x)\, D_j y(t, x)) = 0 & \text{in } [0, T] \times \overline{\Omega} \\ y(t, x) = u_0(t, x) & \text{in } [0, T] \times \Gamma_0 \\ \left(\sum\limits_{i, j=1}^{n} a_{i,j}(x) \cdot D_j y(t, x)\, \nu_i(x) \right) = u_1(t, x) & \text{in } [0, T] \times \Gamma_1 \\ y(0, x) = y_0(x) & \text{in } \overline{\Omega} \end{cases}
$$

con $\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. L'approssimazione di questo tipo di problemi è un lavoro ancora in corso.

BIBLIOGRAFIA

[1] ACQUISTAPACE P., FLANDOLI F. e TERRENI B., *Initial boundary value problems and optimal control for nonautonomus parabolic systems*, SIAM J. Control Optim., **29** (1991), 89-118.

[2] BARDI M. e CAPUZZO DOLCETTA I., *Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*, Birkäuser, Boston (1997).

[3] BUTTAZZO G. e FREDDI L., *Sequences of optimal control problems with measures as controls*, Adv. Math. Sci. Appl., **2(2)** (1993), 215-230.

[4] BUTTAZZO G. e FREDDI L., *Optimal Control Problems with weakly converging input operators*, Discrete and Contin. Dynam. Systems, **1(3)** (1995), 401-420.

[5] DAL MASO G. e RAMPAZZO F., *On systems of ordinary differential equations with measures as controls*, Differetial Integral Equations, **4(4)** (1991), 739-765.

Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, via Belzoni 7, Padova
briani@dm.unipi.it, briani@math.unipd.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Pisa) - Ciclo X
Direttori della ricerca: Prof. P. Acquistapace, Prof. G. Buttazzo