Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Bruno Buonomo

Modelli dinamici di ecosistemi in spazi finito ed infinito dimensionali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1S, p. 33–36.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_33_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. III-A, Supplemento ad Aprile 2000, 33-36

Modelli dinamici di ecosistemi in spazi finito ed infinito dimensionali.

BRUNO BUONOMO

1. – Contenuti e organizzazione della tesi.

Il titolo originale della tesi, che è stata redatta in lingua inglese, è «*Dynamic Ecosystem Models in Finite and Infinite Dimensional Spaces*». In essa vengono trattate equazioni di evoluzione in spazi sia finito che infinito dimensionali, quali modelli per problemi di interazioni propri della Biomatematica, con particolare riferimento alla Dinamica delle Popolazioni.

La tesi è strutturata in cinque capitoli, due dei quali (i capitoli 3 e 5) sono interamente dedicati ai contributi originali dell'autore.

Una linea ideale suddivide la tesi in due parti principali. L'una si riferisce a problemi ad un numero finito di gradi di libertà, la cui descrizione matematica è affidata alle equazioni differenziali ordinarie. L'altra riguarda invece problemi ad un numero infinito di gradi di libertà ed i relativi modelli sono principalmente equazioni differenziali alle derivate parziali di tipo parabolico.

Una introduzione generale, nella quale vengono descritte le nozioni fondamentali dei sistemi dinamici e viene introdotta per grandi linee la teoria della stabilità, dando speciale enfasi al Metodo Diretto di Lyapunov (si veda e.g. [5]), è esposta nel primo capitolo.

2. – Omogeneità spaziale e modelli di tipo chemostato.

I capitoli 2 e 3 sono dedicati alle equazioni differenziali ordinarie e ad alcuni relativi modelli in Dinamica delle Popolazioni, i quali essenzialmente si fondano sull'assunzione di una completa omogeneità spaziale. La letteratura disponibile su questi modelli è molto ampia. Nella tesi viene data enfasi a tre di essi: i modelli di tipo Lotka-Volterra, i modelli *di tipo chemostato* [7] ed i cosiddetti modelli di *interazione popolazione-sostanze tossiche* [6]. Tali modelli sono da sempre oggetto di profondi studi e ad essi viene tutt'ora riconosciuto un notevole ruolo tra i relativamente pochi modelli matematici accettati in Biologia. Nella tesi essi vengono presentati come esempi di applicazione della teoria esposta nel primo capitolo e viene, inoltre, discussa la loro possibile estensione mediante l'inserimento in essi della struttura spaziale.

Contributi originali dell'autore compongono il terzo capitolo, dove viene discusso il problema della crescita di popolazioni (tipicamente specie batteriche) in un ambiente di tipo chemostato, spazialmente omogeneo, in cui agiscano delle sostanze tossiche. In particolare, vengono ricercate condizioni, espresse in termini dei parametri del sistema, che garantiscano la sopravvivenza per le singole specie, la loro coesistenza, o ne determinino l'estinzione (tali condizioni vengono poi raccolte nei cosiddetti it teoremi di soglia).

Dal punto di vista matematico, ciò si traduce nell'analisi del comportamento asintotico delle soluzioni o, talvolta, di quella parte del vettore di stato che rappresenta una «misura» delle popolazioni presenti nell'ecosistema. In questo senso, teoremi di soglia possono essere ottenuti mediante una procedura basata sul concetto di *definitiva limitatezza parziale* [4]. Per i modelli descritti da equazioni differenziali autonome, utili informazioni provengono dall'esistenza di stati stazionari positivi e dall'analisi della loro stabilità, sia locale che globale, mediante tecniche *alla Lyapunov* (si veda [3]).

3. – Crescita di popolazioni e modelli di diffusione.

Nei capitoli 4 e 5 viene discusso il problema della modellizzazione di ecosistemi laddove si tenga conto della disomogeneità spaziale. Accanto ad una panoramica sui risultati già disponibili in letteratura, vengono illustrati contributi originali dell'autore, ai quali è dedicato il capitolo 5.

Nel capitolo 4 sono trattati i sistemi di tipo *reazione-diffusione* e vengono introdotti alcuni metodi qualitativi, quali la procedura di asintotica omogeneizzazione ed i metodi di confronto per funzioni quasimonotone. Vengono inoltre brevemente discussi i modelli con diffusione di Lotka-Volterra e quelli di tipo chemostato (il cosiddetto *unstirred chemostat*).

3.1. – *Modelli con struttura spaziale per la crescita di popolazioni in ambienti inquinati: un modello di tipo reazione-diffusione.*

Il quinto capitolo è interamente dedicato alla modellizzazione di interazioni popolazioni-sostanze tossiche, in presenza di disomogeneità spaziale.

Viene proposto un approccio modellistico rappresentante la dinamica di una popolazione, la cui interazione con le sostanze tossiche avviene attraverso una terza variabile di stato: la quantità di tossico immagazzinato dai singoli organismi costituenti la popolazione. I modelli che ne derivano possono essere considerati delle estensioni, al caso spazialmente disomogeneo, dei modelli di interazione popolazione-sostanze tossiche introdotti negli anni ottanta [6] e discussi nel capitolo 2 della tesi.

A titolo di esempio, citiamo qui il seguente modello (la cui derivazione è discussa dettagliatamente nella tesi, insieme alla sua trattazione generale)

$$
(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial n}{\partial t} - d_n \Delta n = n(\beta - \alpha c - fn) \\ \dfrac{\partial (cn)}{\partial t} + div\, J_c = kzn - (\varrho - fn)\, cn \\ \dfrac{\partial z}{\partial t} - d_z \Delta z = -kzn + (r + d_0 + \alpha c)\, cn - hz + u\,. \end{cases}
$$

Qui $n \equiv n(x, t)$, $c \equiv c(x, t)$ e $z \equiv z(x, t)$ sono funzioni definite in $\Omega \times (0, T]$, con Ω dominio limitato di $\mathbf{R}^N$ ($N = 1, 2, 3$) avente frontiera regolare. Esse rappresentano, rispettivamente, una misura di una popolazione vivente e, in termini di concentrazioni, una misura della sostanza tossica immagazzinata nei singoli organismi componenti la popolazione (che chiameremo sostanza tossica *interna*) ed una misura della sostanza tossica presente nell'ambiente esterno alla popolazione (sostanza tossica *esterna*). Per necessità di sintesi, si omette qui di descrivere i singoli termini che appaiono nelle equazioni. Va sottolineato, tuttavia, che esse derivano da leggi di bilancio e che tutti i parametri che vi compaiono sono considerati costanti e positivi, eccezione fatta, talora, per la funzione $u \equiv u(x, t)$. Quest'ultima rappresenta il tasso esogeno di sostanza tossica immessa nell'ambiente e si assume che sia una funzione regolare, limitata e non negativa. Al sistema (1) vengono, inoltre, associati dati iniziali non negativi. Per quanto concerne i dati al bordo, si suppone che ci sia assenza di flusso attraverso la frontiera nella maggior parte dei modelli considerati.

Nel sistema (1) un ruolo chiave è giocato dal flusso J_c della sostanza tossica interna. Se si assume che anche per J_c, così come per i flussi relativi alle altre due variabili di stato, valga la *legge di Fick*, cioè che sia $J_c = -d_I \nabla(cn)$ (d_I costante positiva), allora si ottiene una modellizzazione di tipo reazione-diffusione. Per tale modello viene fornita una descrizione completa del comportamento asintotico delle soluzioni, utilizzando metodi di asintotica omogeneizzazione e tecniche di stabilità alla Lyapunov (si veda anche [1]). Inoltre, per un caso particolare, vengono forniti risultati riguardanti l'esistenza globale e la stabilità locale di stati stazionari, utilizzando metodi di confronto.

3.2. – *Un approccio diffusivo-convettivo.*

Sebbene la modellizzazione dei flussi *di tipo Fick* per tutte le variabili coinvolte presenta diversi aspetti di notevole interesse, ad esempio per il legame che i conseguenti modelli hanno con i noti modelli di Field-Noyes, va sottolineato che essa rappresenta una approssimazione piuttosto forte del fenomeno biologico in esame. Un primo passo verso una rappresentazione più realistica appare la richiesta che la dinamica spaziale della sostanza tossica interna dipenda da quella della popolazione. Sembra dunque naturale poter assumere che si abbia $J_c = cJ_n = -$

$d_n c \nabla n$. Ciò dà luogo ad un modello di tipo *diffusivo-convettivo*, la cui seconda equazione, come si deriva da $(1)_2$, assume la forma

$$\frac{\partial (cn)}{\partial t} - d_n c \Delta n - d_n \nabla c \cdot \boldsymbol{\nabla} n = kzn - (r + m + d_0 + \alpha c)\, cn$$

Tale modello si presenta totalmente non lineare e le difficoltà che la sua struttura presenta sono notevoli. Resta aperto, ad esempio, il problema dell'esistenza di una soluzione (appropriatamente definita) e della sua unicità. Tuttavia, mediante strumenti sia analitici che numerici (si veda [2] per maggiori dettagli sulla formulazione numerica del problema e per le tecniche di implementazione), si riescono a provare alcune proprietà qualitative del modello e ad ottenere coerenti risultati concernenti l'effetto delle sostanze tossiche sulla crescita della popolazione. In particolare, si prova la positività delle soluzioni e si studiano i casi di crescita malthusiana e logistica. L'approccio numerico consente di congetturare, anche nel caso più generale, la validità di teoremi di soglia, ottenuti analiticamente in presenza di alcune ipotesi che semplificano il modello. I risultati delle simulazioni numeriche sono raccolti in appendice alla tesi.

BIBLIOGRAFIA

[1] BUONOMO B. e DI LIDDO A., *A diffusive modelling approach to population dynamics in polluted environment*, Dynamic Systems and Applications, **8** (1999), 181-196.

[2] BUONOMO B., DI LIDDO A. e SGURA I., *A diffusive-convective model for the dynamics of population-toxicant interactions: some analytical and numerical results*, Mathematical Biosciences, **157** (1999), 37-64.

[3] FERGOLA P., BUONOMO B. e RUGGIERI C., *Chemostat type equations modelling a polluted environment*, Mathematical and Computer Modelling, **24** (1996), 13-22.

[4] FERGOLA P., TENNERIELLO C. e BUONOMO B., *Survival of populations in a polluted chemostat-like environment and partial ultimate boundedness*, Ecology of Industrial Regions, **2** (1996), 91-95.

[5] FLAVIN J. e RIONERO S., *Qualitative estimates for partial differential equations: an introduction*, CRC Press, Boca Raton (1996).

[6] HALLAM T. G., CLARK C. E. e JORDAN G. S. , *Effects of toxicant on populations: a qualitative approach II: first order kinetics*, Journal of Mathematical Biology, **18** (1983), 25-35.

[7] SMITH H. e WALTMAN P., *The theory of the chemostat*, Cambridge Studies in Mathematical Biology, **13** (1995).

Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università «Federico II» di Napoli
e-mail: buonomo@matna2.dma.unina.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Napoli) - Ciclo X
Direttori della ricerca: Prof. Paolo Fergola e Prof. Salvatore Rionero