Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Katiuscia Cerqueti

Un risultatodi unicità per un'equazione semilineare ellittica con esponente critico in domini simmetrici

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1S, p. 45–48.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_45_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. III-A, Supplemento ad Aprile 2000, 45-48

Un risultato di unicità per un'equazione semilineare ellittica con esponente critico in domini simmetrici.

KATIUSCIA CERQUETI

Consideriamo il seguente problema

$$(\mathrm{P}_\varepsilon) \qquad \begin{cases} -\Delta u = N(N-2)\, u^p + \varepsilon u & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega\,, \end{cases}$$

dove Ω è un dominio regolare e limitato di $\mathbf{R}^N$ $(N \geqslant 5)$; $0 < \varepsilon < \lambda_1$ (λ_1 essendo il primo autovalore dell'operatore di Laplace in $H_0^1(\Omega)$) e $p = \dfrac{N+2}{N-2}$. Come è ben noto, se ε è sufficientemente piccolo, per il Teorema di Brezis e Nirenberg ([1]), esiste una soluzione di (P_ε), mentre se Ω è stellato l'identità di Pohozaev implica che per $\varepsilon = 0$ non esistono soluzioni. Questi due risultati permettono di dimostrare che se il dominio è stellato le soluzioni non possono rimanere uniformemente limitate (rispetto ad ε) in norma L^∞ e così esse esplodono in qualche punto di Ω. Più precisamente, se per $\varepsilon > 0$ denotiamo con u_ε una soluzione e con $x_\varepsilon \in \Omega$ un punto di massimo di u_ε, allora esistono sottosuccessioni $\varepsilon_i \to 0$, $u_i = u_{\varepsilon_i}$, $x_i = x_{\varepsilon_i}$ ed un punto $\overline{x} \in \Omega$ tali che per $i \to \infty$,

$$u_i(x_i) \to \infty\,; \qquad x_i \to \overline{x}\,.$$

Il punto $\overline{x}$ viene perciò detto punto di *blow up*. Denotiamo inoltre con $\|\cdot\|$ la norma $L^\infty(\Omega)$. Nella prima parte della Tesi viene affrontato lo studio del comportamento asintotico di u_i nell'intorno di un punto di blow up. A questo scopo, si considerano le soluzioni positive u_i della sola equazione in $(\mathrm{P}_{\varepsilon_i})$ (senza quindi condizioni al bordo). Successivamente, vengono date le definizioni di punto di blow up isolato e di punto di blow up isolato e semplice e ne vengono studiate le proprietà. Ricordiamo che questi due differenti concetti di punti di blow up furono introdotti intorno al 1990 da R. Schoen per lo studio del problema della curvatura scalare assegnata. Successivamente, queste idee furono sviluppate da vari autori ed applicate a diversi problemi. In particolare, citiamo il lavoro di Y. Y. Li ([8]) che è stato il principale punto di riferimento per i nostri risultati.

Successivamente abbiamo applicato le stime trovate per ottenere un risultato di unicità e nondegenerazione per le soluzioni di (P_ε). Per quanto riguarda il problema dell'unicità, osserviamo che la forma del dominio è importante e perciò qualche ipotesi su Ω è necessaria. Ad esempio, nel caso della palla, possiamo citare il risultato di Srikanth del 1993 nel quale si dimostra che esiste una sola soluzione per $0 < \varepsilon < \lambda_1$. D'altra parte, se il dominio non è convesso possono esistere più soluzioni. Se Ω è un anello, possiamo ad esempio citare il risultato di Lazzo del

1992 nel quale si dimostra l'esistenza di almeno due soluzioni per ε piccolo. L'approccio utilizzato da Srikanth è stato quello di utilizzare alcuni metodi di equazioni differenziali or dinarie perché nel caso della palla, grazie al Teorema di Gidas, Ni e Nirenberg ([5]), le soluzioni sono radialmente simmetriche. Noi supporremo che il dominio sia simmetrico rispetto agli iperpiani $\{x_k = 0\}$ e convesso nelle direzioni x_k, per $k = 1, \dots, N$. Osserviamo che queste ipotesi implicano che il dominio è stellato e inoltre permettono di applicare ancora il Teorema di Gidas, Ni e Nirenberg e per questo motivo esse consentono di generalizzare nel modo più naturale il risultato di unicità valido nel caso della palla. Esse furono utillizzate dapprima nel lavoro di Damascelli, Grossi e Pacella ([4]) e poi in quello di Grossi ([6]) per ottenere un risultato di unicità per il problema

$$(\mathrm{P}_{\lambda,p}) \qquad \begin{cases} -\Delta u = N(N-2)\, u^p + \lambda u & \text{in } \Omega \\ \quad u > 0 & \text{in } \Omega \\ \quad u = 0 & \text{su } \partial\Omega\,, \end{cases}$$

dove $p > 1$, $\lambda < \lambda_1$ e $N \geqslant 2$. Utilizzando essenzialmente il principio di massimo, in [4] si dimostra l'unicità della soluzione per $N = 2$ e $p > 1$, mentre per $N \geqslant 3$, in [6], utilizzando metodi di blow up si ottiene l'unicità della soluzione quando $\lambda = 0$ e l'esponente p è sottocritico, ma sufficientemente vicino a $(N+2)/(N-2)$. I risultati che abbiamo ottenuto possono essere contenuti nel seguente

TEOREMA 1. – *Sia Ω un dominio regolare e limitato di* $\mathbf{R}^N$ $(N \geqslant 5)$, *simmetrico rispetto agli iperpiani* $\{x_k = 0\}$ *e convesso nelle direzioni x_k, per $k = 1, \dots, N$. Allora esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che se u_ε e v_ε sono due soluzioni di* (P_ε), *si ha*

$$u_\varepsilon = v_\varepsilon, \qquad \text{per } \varepsilon < \varepsilon_0 .$$

Inoltre, la (unica) soluzione è nondegenere.

La dimostrazione di questo risultato è stata divisa in due parti. In un primo momento, si dimostra l'unicità e la non degenerazione della soluzione nella classe delle soluzioni caratterizzata dalla proprietà

$$(*) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2\, dx}{\left(\int_\Omega |u_\varepsilon|^{p+1}\right)^{2/p+1} dx} = S_N,$$

dove S_N è la migliore costante di Sobolev in $\mathbf{R}^N$. Il risultato di unicità ottenuto è il seguente

TEOREMA 2 ([2]). – *Sia Ω come nel* Teorema (0.1). *Supponiamo che u_ε e v_ε siano due soluzioni di* (P_ε) *soddisfacenti la proprietà* $(*)$. *Allora, esse coincidono per ε sufficientemente piccolo.*

Successivamente l'ipotesi $(*)$ viene rimossa dimostrando il seguente

TEOREMA 3 ([3]). – *Sia* Ω *come nel* Teorema (0.1). *Allora, se* u_ε *è una soluzione di* (P_ε), *vale* $(*)$.

La dimostrazione del Teorema 2 utilizza tecniche di blow up come in [6] e uno studio sul comportamento asintotico per $\varepsilon \to 0$ delle soluzioni di (P_ε) che soddisfano la proprietà $(*)$. I risultati a cui facciamo riferimento sono dovuti ad Han ([7]). Si procede per assurdo, supponendo che esista $\varepsilon_i \to 0$ tale che $||u_i - v_i|| > 0$. Per il Teorema di Gidas, Ni e Nirenberg, le due funzioni sono simmetriche e inoltre esse assumono il loro valore massimo (solo) nell'origine. Questo implica che

$$\|u_i\| = u_i(0) \to \infty\,. \tag{1}$$

L'idea è quella di considerare la differenza (normalizzata) delle due funzioni opportunamente riscalata:

$$w_i(x) = \frac{1}{\|u_i - v_i\|}\left[u_i\left(\frac{x}{\|u_i\|^{(p-1)/2}}\right) - v_i\left(\frac{x}{\|u_i\|^{(p-1)/2}}\right)\right], \qquad x \in \Omega_i\,,$$

dove $\Omega_i = \|u_i\|^{(p-1)/2}\,\Omega$. Osserviamo che $\Omega_i \nearrow \mathbf{R}^N$ e che w_i è una funzione simmetrica. Successivamente si dimostra che esiste una funzione (simmetrica) $w \in C^2_{loc}(\mathbf{R}^N)$ tale che $w_i \to w$ in $C^2_{loc}(\mathbf{R}^N)$ e che necessariamente

$$w = a\,\frac{1-|x|^2}{(1+|x|^2)^{N/2}} + \sum_{k=1}^{N} b_k\,\frac{x_k}{(1+|x|^2)^{N/2}}\,, \tag{$**$}$$

dove $a,\ b_k \in \mathbf{R}$. Attraverso argomenti che coinvolgono la simmetria di w, l'identità di Pohozaev, i risultati di Han e alcune proprietà sulla parte regolare della funzione di Green, si dimostra che l'espressione $(**)$ implica una contraddizione. Questo conclude la dimostrazione del Teorema 0.2.

La dimostrazione del Teorema 0.3 si basa sullo studio (locale) del comportamento asintotico nell'intorno di un punto di blow up di cui abbiamo parlato prima. Osserviamo subito che, per la (1), l'origine è un punto di blow up. Il passo successivo consiste nel dimostrare la seguente stima

$$u_i(x) \leqslant \frac{C_1}{|x|^{(N-2)/2}}\,, \qquad x \in \Omega \tag{2}$$

per qualche $C_1 > 0$. Come conseguenza si ottiene che l'origine è un punto di blow up isolato. Usando le stime sui punti di blow up isolati, si ottiene l'esistenza di un intorno dell'origine (dipendente da i), del tipo $|x| < r_i$, con $r_i \to 0$, tale che

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\displaystyle\int_{|x|<r_i} |\nabla u_i|^2\,dx}{\left(\displaystyle\int_{|x|<r_i} |u_i|^{p+1}\right)^{2/p+1} dx} = S_N\,.$$

D'altra parte, si dimostra che ogni punto di blow up isolato è semplice. Usando allora i risultati sui punti di blow up isolati e semplici, si ottiene

$$u_i(x) \leqslant \frac{C_2}{\|u_i\| |x|^{N-2}}, \qquad \text{su } |x| < \delta \tag{3}$$

per qualche $C_2 > 0$ e $\delta > 0$. Come conseguenza, per il Teorema di Gidas, Ni e Nirenberg,

$$u_i \to 0, \qquad \text{uniformemente su } |x| \geqslant \delta\,. \tag{4}$$

In particolare, l'origine è l'unico punto di blow up. Infine per la (3) e la (4), si ottiene

$$\lim_{\varepsilon_i \to 0} \frac{\int_\Omega |\nabla u_i|^2\,dx}{\left(\int_\Omega |u_i|^{p+1}\right)^{2/p+1} dx} = \lim_{i \to \infty} \frac{\int_{|x|<\delta} |\nabla u_i|^2\,dx}{\left(\int_{|x|<\delta} |u_i|^{p+1}\right)^{2/p+1} dx} = S_N$$

e questo dimostra il Teorema 3.

BIBLIOGRAFIA

[1] H. Brezis and L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent*, Comm. Pure Appl. Math., **36** (1983), 437-477.

[2] K. Cerqueti, *A uniqueness result for a semilinear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent in symmetric domains*, Asymptotic Analysis (1999), in corso di stampa.

[3] K. Cerqueti and M. Grossi, *Local estimates for some elliptic equation with critical Sobolev exponent and application to an uniqueness result*, preprint.

[4] L. Damascelli, M. Grossi and F. Pacella, *Qualitative properties of positive solutions of semilinear elliptic equations in symmetric domains via the maximum principle*, Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse Nonlineaire, **16** (1999).

[5] B. Gidas, W. Ni and L. Nirenberg, *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys., **68** (1979), 209-243.

[6] M. Grossi, *A uniqueness result for a semilinear elliptic equation in symmetric domains* Advances in Diff. Eqs, in corso di stampa.

[7] Z. C. Han, *Asymptotic approach to singular solutions for nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent*, Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse Nonlineaire, 8 (1991), 159-174.

[8] Y. Y. Li, *Prescribing Scalar Curvature on S^N and related problems, Part I*, J. of Diff. Eqs., **120** (1995), 319-410.

Dipartimento di Matematica, II Università degli Studi di Roma «Tor Vergata»,
Via della Ricerca Scientifica I-00133 Roma; e-mail: cerqueti@axp.mat.uniroma2.it
Dottorato di Ricerca in Matematica (sede amministrativa: Roma II)
Direttori di Ricerca: Proff. F. Pacella e M. Grossi
(Dipartimento di Matematica dell'Università di Roma «La Sapienza»)