Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Emma D'Aniello

Prolungamenti simultanei di misure

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1S, p. 57–60.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_57_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. III-A, Supplemento ad Aprile 2000, 57-60

Prolungamenti simultanei di misure.

EMMA D'ANIELLO

Le misure finitamente additive, nel corso degli anni, sono state ampiamente investigate da matematici e statistici, tra cui S. Bochner, il quale le ha anche considerate più interessanti delle misure numerabilmente additive [2: pag. v]. Già all'inizio degli anni 80 il numero di lavori su queste funzioni era considerevole, però non si conoscevano le relazioni fra i vari risultati, finché K. P. S. Bhaskara Rao e M. Bhaskara Rao non presentarono uno studio sistematico e dettagliato delle misure finitamente additive a valori in $[-\infty, +\infty]$ (*charges*) che unificasse le ricerche fino ad allora realizzate [1].

Il problema di trovare condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di un prolungamento comune di due *charges* compatibili μ e ν definite su due campi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, rispettivamente, di sottinsiemi di un insieme Ω che sia definito sul campo generato da $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, è stato suggerito da un articolo di Guy [4] e la soluzione di tale problema è stata dimostrata da D. Maharam [5] che si è occupata di come prolungare simultaneamente una qualsiasi famiglia di misure numerabilmente additive, riuscendo, talvolta, a dimostrare soltanto la finita additività del prolungamento. La sua tecnica consiste nel trasferire il problema negli spazi generati dalle funzioni caratteristiche degli insiemi dei singoli campi su cui le misure sono definite.

Per precisare il risultato di D. Maharam introduciamo le seguenti notazioni.

Sia $\mathcal{F}_\gamma$, $\gamma \in \Gamma$, una famiglia di campi di sottinsiemi di un insieme Ω e, per ogni $\gamma \in \Gamma$, sia μ_γ una misura numerabilmente additiva definita in $\mathcal{F}_\gamma$. Indicato con L l'insieme delle funzioni reali definite in Ω, sia L_γ il sottinsieme di L costituito dalle funzioni indicatrici degli elementi di $\mathcal{F}_\gamma$; per ogni $\gamma \in \Gamma$, sia T_γ il funzionale definito dalla formula

$$T_\gamma(f) = \int_\Omega f d\mu_\gamma .$$

Si ha allora:
Esiste un prolungamento comune finitamente additivo delle μ_γ sul campo generato dagli $\mathcal{F}_\gamma$ se e solo se esiste un prolungamento comune dei funzionali T_γ sullo spazio vettoriale generato dalla unione degli L_γ.

Diversi autori, tra i quali A. Basile, K. P. S. Bhaskara Rao, R. Göbel, K. D. Schmidt, R. M. Shortt e G. Waldschaks, si sono occupati del problema non banale dell'esistenza di prolungamenti comuni limitati di misure finitamente additive limitate.

Noi otteniamo una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un prolungamento comune tramite la nozione di catena reale, nozione che può essere data al modo seguente:

DEFINIZIONE 1. – *Siano* $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{B}$ *campi di sottinsiemi di un insieme non vuoto* Ω *e* μ *e* ν *due misure finitamente additive limitate e compatibili a valori reali definite in* $\mathcal{A}$ *e in* $\mathcal{B}$*, rispettivamente. Diciamo che una parte* $\{C_0, C_1, \dots, C_{n+1}\}$ *di* $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ *è una catena di lunghezza* n*, con* $n \in N$*, se* $\emptyset = C_0 \subseteq C_1 \subseteq C_2 \subseteq \ldots \subseteq C_{n+1} = \Omega$*. Diciamo poi che una successione* $\{C_n\}_{n \in N}$ in $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ *è una catena di* $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ *di lunghezza infinita se è monotona-crescente ed il suo primo termine coincide con* $\emptyset$.

Una catena (finita o numerabile) è una catena reale se ogni differenza $C_{i+1} - C_i$ *è non vuota e ciascuno dei suoi insiemi* C_i *(ad eccezione del primo e dell'ultimo) è in uno solo dei campi* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$*, e inoltre* C_{i+1} *è in* $\mathcal{B}$ *(rispettivamente in* $\mathcal{A}$*) ogni volta che* C_i *è in* $\mathcal{A}$ *(rispettivamente in* $\mathcal{B}$*).*

Il teorema da noi ottenuto può essere enunciato al modo seguente:

TEOREMA 1. – *Siano* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, μ *e* ν *come nella Definizione* 1. *Sono equivalenti*:

(i) *Tutte le catene reali in* $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ *sono di lunghezza limitata.*

(ii) *Due charges limitate, compatibili su* $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{B}$ *hanno un prolungamento comune limitato.*

La tecnica dimostrativa fa uso di una opportuna nozione di distanza introdotta sullo spazio di Stone di $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ analogamente a quanto fatto da R. Göbel ed R. M. Shortt [3].

Tale nozione di distanza può anche essere utilizzata per dare altre caratterizzazioni di prolungamenti comuni.

I risultati ottenuti nel caso reale sono un primo passo per affrontare il problema dell'esistenza di prolungamenti comuni per funzioni a valori vettoriali. Anche qui premettiamo alcune definizioni.

DEFINIZIONE 2. – *Uno spazio di Banach* $\mathbf{X}$ *ha la proprietà di Hahn-Banach se ciascun operatore lineare limitato* T *su un sottospazio di uno spazio di Banach* $\mathbf{Y}$ *a valori in* $\mathbf{X}$ *ha un prolungamento lineare* $\tilde{T}$ *da* $\mathbf{Y}$ *in* $\mathbf{X}$ *tale che* $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

DEFINIZIONE 3. – *Siano* $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{B}$ *campi di sottinsiemi di un insieme* Ω *e siano* $\mu : \mathcal{A} \to \mathbf{X}$ *e* $\nu : \mathcal{B} \to \mathbf{X}$ *misure vettoriali compatibili a variazione limitata. Siano* $F(\mathcal{A})$ *ed* $F(\mathcal{B})$ *gli spazi vettoriali generati dalle funzioni indicatrici degli elementi di* $\mathcal{A}$ *e di* $\mathcal{B}$*, rispettivamente. Definiamo*

$I^0(\mu, \nu) = \inf\{\|\varrho\| : \varrho$ *prolungamento comune di* μ *e* ν *su* $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}\}$,

$$S^0(\mu, \nu) = \sup\left\{ \left\| \int f d\mu + \int g d\nu \right\| : f \in F(\mathcal{A}),\ g \in F(\mathcal{B}),\ \|f+g\| \leq 1 \right\},$$

$$SC^0(\mu, \nu) = \sup\left\{ \left\| \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i(\eta(C_{i+1}) - \eta(C_i)) \right\| : \emptyset = C_0 \subsetneq C_1 \subsetneq C_2 \subsetneq \ldots \subsetneq C_{n+1} = \Omega \right.$$

una catena in $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}, \{\varepsilon_i\}$ *una famiglia finita che soddisfa* $\left. \varepsilon_i = \pm 1,\ n \geqslant 1 \right\}$.

Il teorema a cui perveniamo è il seguente:

TEOREMA 2. – *Siano* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, μ, ν *e* $\mathbf{X}$ *come nella Definizione* 3. *Allora* $S^0(\mu, \nu) = I^0(\mu, \nu) = SC^0(\mu, \nu)$. *Segue, dunque, che* μ *e* ν *hanno un prolungamento comune a variazione limitata se e solo se* $SC^0(\mu, \nu) < \infty$.

Ci siamo infine occupati del cosiddetto «problema ai margini»,

DEFINIZIONE 4. – *Una classe* $\mathcal{B}$ *di sottinsiemi di un insieme* X *è compatta se ha la seguente proprietà: data una successione* $\{K_n\}_{n \in N}$ *di elementi di* $\mathcal{B}$ *tale che* $K_1 \cap \ldots \cap K_n \neq \emptyset$ *per ogni* n, *l' intersezione* $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ *è non vuota.*

Sia $\mathcal{F}$ *un campo di sottinsiemi di* X *e sia* $\mu : \mathcal{F} \to \mathbf{B}$ *una misura a valori in uno spazio di Banach* $\mathbf{B}$. *Diciamo che* μ *è una misura compatta se esiste una classe compatta* $\mathcal{B}$ *di sottinsiemi di* X *tale che, per ogni* $B \in \mathcal{F}$ *e* $\varepsilon > 0$, *esistono insiemi* $B' \in \mathcal{F}$ *e* $K \in \mathcal{B}$ *tali che* $B' \subseteq K \subseteq B$ *e* $\|\mu\|(B - B') < \varepsilon$. *In tal caso diciamo che la classe* $\mathcal{B}$ μ*-approssima* $\mathcal{F}$. *Sia* X *uno spazio metrico separabile completo e sia* $\mathbf{B}$ *un reticolo di Banach con cono positivo* $\mathbf{B}^+$. *Ogni misura vettoriale numerabilmente additiva* $\mu : \mathcal{B}(X) \to \mathbf{B}^+$ è regolare e, quindi, compatta.

DEFINIZIONE 5. – *Siano* $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{B}$ *campi di sottinsiemi di un insieme* X *e di un insieme* Y, *rispettivamente, e siano* $\mu : \mathcal{A} \to \mathbf{B}^+$ *e* $\nu : \mathcal{B} \to \mathbf{B}^+$ *misure vettoriali a valori nel cono positivo di un reticolo di Banach completo* $\mathbf{B}$. *Supponiamo che* $\mu(X) = \nu(Y) = \alpha$, *per qualche* $\alpha \in \mathbf{B}^+$. *Sia* $\mathcal{A}\ \mathcal{B}$ *il* σ*-campo generato da tutti i rettangoli* $A \times B$, $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$. *Diremo che una misura* $\varrho : \mathcal{A}\mathcal{B} \to \mathbf{B}^+$ *ha margini* μ *e* ν *se* $\varrho(A \times Y) = \mu(A)$ *e* $\varrho(X \times B) = \nu(B)$ *per ogni* $A \in \mathcal{A}$ *e* $B \in \mathcal{B}$. *La misura vettoriale* ϱ *prende il nome di prodotto indiretto di* μ *e* ν

dando tra l'altro la seguente generalizzazione del teorema di Strassen:

TEOREMA 3. – *Siano* $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{B}$ σ*-campi di sottinsiemi di un insieme* X *e di un insieme* Y*, rispettivamente, e siano* $\mu : \to \mathbf{B}^+$ *e* $\nu : \to \mathbf{B}^+$ *misure numerabilmente additive, dove* $\mathbf{B}^+$ *è il cono positivo di un reticolo di Banach non avente sottoreticoli isomorfi ad* l^∞*, tali che* $\mu(X) = \nu(Y) = \alpha$*. Supponiamo che* μ *sia compatta e che* $F \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ *sia intersezione numerabile di insiemi in* $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$*. Per ogni* $v \in \mathbf{B}^+$*,* $v \leqslant \alpha$*, sono equivalenti*:

(i) *Esiste una misura numerabilmente additiva* $\varrho : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to \mathbf{B}^+$ *con margini* μ *e* ν *e tale che* $\mu(F) \geqslant v$.

(ii) *Per ogni* $A \in \mathcal{A}$ *e* $B \in \mathcal{B}$*,* $\mu(A) + \nu(B) \leqslant 2\alpha - v$*, ogni volta che* $A \times B \subseteq F'$.

Come conseguenza di tale teorema, nel caso in cui $F = X \times Y$ e $v = \alpha$, otteniamo che esiste sempre una misura ϱ con margini μ e ν. Tale misura, se identifichiamo A con $A \times Y$ e B con $X \times B$, per ogni A in $\mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$, rispettivamente, e definiamo

$$\tilde{\mu}(A \times Y) = \mu(A),\ \forall A \in \mathcal{A}, \quad e \quad \tilde{\nu}(X \times B) = \nu(B),\ \forall B \in \mathcal{B},$$

è un prolungamento comune numerabilmente additivo di $\tilde{\mu}$ e $\tilde{\nu}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. BASILE, K. P. S. BHASKARA RAO and R. M. SHORTT, *Bounded common extensions of charges*, Proc. Amer. Math. Soc., **121** (1994), 137-143.

[2] K. P. S. BHASKARA RAO and M. BHASKARA RAO, *Theory of Charges*, Academic Press, London and New York, 1983.

[3] R. GÖBEL and R. M. SHORTT, *Algebraic ramifications of the common extension problem for group-valued measures*, Fund. Math., **146** (1994), 1-20.

[4] D. L. GUY, *Common extensions of finitely additive probability measures*, Portugal. Math., **20** (1961), 1-5.

[5] D. MAHARAM, *Consistent extensions of linear functionals and of probability measures*, Prooceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, University of California Press, Berkeley and Los Angeles, Vol. **2** (1972), 127-147.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni «R. Caccioppoli»
Università degli Studi di Napoli «Federico II» - Compl. Universitario Monte S. Angelo
Via Cintia - 80126 Napoli, Italia
e-mail: daniel@matna2.dma.unina.it; daniel@matna3.dma.unina.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Napoli) - Ciclo X
Direttore di ricerca: Prof. Paolo de Lucia, Università degli Studi di Napoli «Federico II»