Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Emilio De Santis

Alcune disuguaglianze nel modello di Edwards-Anderson e in altri modelli di vetri di spin

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1S, p. 65–67.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_65_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. III-A, Supplemento ad Aprile 2000, 65-67

Alcune disuguaglianze nel modello di Edwards-Anderson e in altri modelli di vetri di spin.

Emilio De Santis

Nella tesi abbiamo studiato alcuni aspetti di sistemi disordinati, ossia sistemi statistici in ambiente aleatorio (*random environment*) e soprattutto abbiamo analizzato sistemi tipici della Meccanica Statistica quali i *vetri di spin*. I risultati ottenuti riguardano sia la dinamica che la Meccanica Statistica dell'Equilibrio e sono collegati fra loro da un comune uso di metodi ricavati dalla teoria della *Percolazione*. Lo studio dei modelli di vetri di spin presenta delle difficoltà maggiori rispetto allo studio di analoghi modelli ferromagnetici; ciò deriva sia dalla aleatorietà del sistema che dalla frustrazione data dalla presenza di interazioni di entrambe i segni $\pm$.

I modelli che abbiamo studiato, al di là dell'interesse fisico, hanno dato origine ad una serie di stimolanti problemi di probabilità, essendo strettamente connessi alla percolazione di sistemi interagenti (non bernoulliani).

Abbiamo analizzato alcune proprietà dei modelli di vetri di spin con interazioni a primi vicini su reticoli $\mathbf{Z}^d$ dove il modello base è quello di Edwards-Anderson. Questo modello differisce significativamente dal modello di Sherrington-Kirkpatrick che ha interazioni tra tutte le coppie di vertici e non ha una struttura geometrica. Proprio per la struttura reticolare si presentano delle difficoltà aggiuntive, dal momento che in genere c'è una dipendenza dei risultati dalla dimensione dello spazio. La località delle interazioni però rende la misura un campo markoviano permettendo l'uso di tecniche descritte ampiamente in letteratura.

Il lavoro è stato diviso in quattro capitoli. Il primo introduce alcuni risultati noti e la notazione usata nel resto della tesi. Il secondo tratta alcuni problemi di percolazione per il modello di Fortuin e Kasteleyn (in seguito indicato FK) e alcuni collegamenti con modelli di vetri di spin. Il terzo mostra una inclusione stretta fra la regione di unicità di modelli di vetri di spin e quella di corrispondenti sistemi ferromagnetici. Nell'ultimo capitolo, sempre per il modello di Edwards-Anderson, si studiano alcune proprietà della dinamica di *Glauber* in dimensione $d = 2$ su una scatola finita $\Lambda = [-L, L]^2$ per valori grandi e piccoli del parametro temperatura e si riesce a mostrare che il *gap spettrale* ha un andamento, come funzione del lato L della scatola, diverso alle alte e basse temperature. Diamo qualche dettaglio maggiore.

Nel secondo capitolo abbiamo ampliato il risultato di [3] in cui si dimostra che con probabilità 1 si ha percolazione nel modello FK in dimensione $d \geqslant 3$ se il parametro temperatura è sufficientemente basso e le interazioni J_b hanno distribuzione bernoulliana simmetrica sui valori $\{-1, 1\}$. Siamo riusciti a indebolire molte di queste ipotesi: per regioni di bassa temperatura abbiamo mostrato che c'è percolazione nei modelli FK per qualsiasi distribuzione delle interazioni J_b che abbia il modulo $|J_b|$ uniformemente limitato dal basso da una costante positiva. Il risultato ha interessanti conseguenze per la Meccanica Statistica dell'Equilibrio in sistemi frustrati e in particolare si ricava che per qualsiasi distribuzione bernoulliana asimmetrica per le interazioni J_b sui valori $\{-1, 1\}$ si ha transizione di fase per ogni dimensione abbastanza alta; questo significa che date tutte le probabilità condizionate esiste più di una misura di probabilità che le rispetta.

Nel terzo capitolo abbiamo dimostrato la disuguaglianza stretta fra la regione di unicità di modelli di vetri di spin e quella di corrispondenti sistemi ferromagnetici; i due sistemi hanno interazioni uguali in modulo ma mentre nel sistema ferromagnetico sono tutte positive, nel sistema di vetri di spin ogni interazione ha distribuzione bernoulliana sui valori ± 1. Riassumiamo qui i punti essenziali della dimostrazione:

(a) si dimostra una disuguaglianza stretta nella percolazione dei modelli FK collegati ad Ising ferromagnetico e a un modello di vetri di spin con frustrazione periodica;

(b) si ripete la dimostrazione nel caso in cui la frustrazione non sia periodica e quindi si ottiene la disuguaglianza pur ammettendo regioni ferromagnetiche arbitrariamente grandi (i risultati in questo caso possono valere solo P_J-q.o.);

(c) nel caso di sistemi frustrati, a differenza di quelli ferromagnetici, si perde l'equivalenza fra la transizione di fase e la percolazione del corrispondente modello FK, quindi si deve recuperare, almeno in parte, la relazione citata fra *percolazione* e *transizione di fase*.

Per il punto (a) abbiamo adattato il lavoro [1] ai nostri scopi, ovviamente ci sono delle difficoltà aggiuntive dovute al fatto che [1] è pensato per sistemi ferromagnetici. Il punto (b) richiede un'idea aggiuntiva. Si dimostra la proprietà per la combinazione convessa di alcune misure ottenuta integrando rispetto al parametro interazione, mentre si può recuperare la relazione per le singole realizzazioni delle interazioni mostrando che questa proprietà è invariante per un cambiamento di un numero finito di interazioni. Questo mostra che l'evento è contenuto nella σ-algebra coda (*tail* σ-algebra) e quindi, essendo le interazioni distribuite Bernoulli, deve valere la legge $0-1$. A questo punto possiamo concludere la dimostrazione del punto (b) utilizzando il teorema di Fubini e trovando che con probabilità positiva – quindi uno, per la legge $0-1$ – vale la disuguaglianza stretta sul punto critico della percolazione. Per il punto (c) abbiamo seguito la dimostrazione di [4] che fornisce un metodo interessante e utilizzabile in contesti molto generali; siamo così riusciti a costruire una misura congiunta che permette di escludere la transizione di fase in una regione in cui non si ha ancora percolazione del modello FK frustrato ma si ha percolazione – quindi transizione di fase – del modello FK ferromagnetico.

Nell'ultimo capitolo ci siamo occupati non solo della misura di equilibrio, ma anche della stima della velocità di convergenza a quest'ultima partendo da una qualsiasi altra misura di probabilità. Il tipo di dinamica che si è considerata è quella di *Glauber*: un processo di Markov miscelante, locale (modifica uno spin alla volta lasciandolo in equilibrio con l'esterno) frequentemente usato in Meccanica Statistica. Per caratterizzare la velocità di convergenza abbiamo utilizzato, come avviene di solito per le catene di Markov, il gap spettrale λ (*spectral gap*). Abbiamo ottenuto che in alcune regioni gli spin rimangono fortemente correlati se il parametro temperatura è sufficientemente piccolo. Abbiamo considerato una successione di scatole $\Lambda_L = [-L, L]^2$ in cui confiniamo il sistema e abbiamo mostrato che l'andamento del gap spettrale per $L \to \infty$ ad alta e bassa temperatura è qualitativamente diverso. Precisamente, per una temperatura T sufficientemente piccola si ottiene P_J-q.o. che il gap spettrale $\lambda(T, L)$ verifica:

$$\lambda(T, L) \leqslant 1 - \exp\left(-\frac{k(T)}{A(T)^{\sqrt{\ln L}}}\right) \tag{1}$$

definitivamente in L, dove $A(T) > 1$ e $k(T) > 0$. Invece per T sufficientemente grande si ha P_J-q.o. che $\lambda(T, L)$ verifica:

$$\lambda(T, L) \geqslant \frac{C(T)}{\ln L} \tag{2}$$

definitivamente in L, dove $C(T) > 0$. Si vede che in entrambi i casi $\lambda(T, J)$ può tendere a zero ma con andamenti diversi; definitivamente in L si ottiene che il gap spettrale è maggiore per valori alti della temperatura. Risultati analoghi per il modello di Ising diluito sono stati ottenuti in [2]. La maggiore difficoltà che si incontra nella dimostrazione di questo risultato è dovuta all'impossibilità di isolare le regioni ferromagnetiche dal resto del sistema; per questo motivo non si possono utilizzare i risultati noti per il modello di Ising ferromagnetico.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. Bezuidenhout, G. Grimmett e H. Kesten, *Strict monotonicity for critical values of Potts models and random cluster processes*, Communications in Mathematical Physics, **158** (1993), 1-16.

[2] F. Cesi, C. Maes e F. Martinelli, *Relaxation in disordered magnets in the Griffiths regime*, Communications in Mathematical Physics, **188** (1997), 135-173

[3] A. Gandolfi, M. Keane e C. Newman, *Uniqueness of the infinite component in a random graph with applications to percolation and spin glass*, Probability Theory and Related Fields, **92** (1992), 511-527.

[4] C. Newman, *Topics in Disordered Systems*, Lectures in Mathematics, Birkhäuser, ETH Zürich (1997).

Dipartimento di Matematica, Università di Roma «La Sapienza»
Indirizzo personale: Via dei Colombi 137, 00169, Roma
Dottorato in matematica (sede amministrativa: Roma «La Sapienza») - Ciclo X
Direttore di ricerca: Prof. Alberto Gandolfi, Università di Roma «Tor Vergata»