Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Valentina De Simione

Il funzionale di Totale Variazione nel problema dell'eliminazione del rumore da immagini digitali: dal modello al software matematico

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1S, p. 69–72.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_69_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. III-A, Supplemento ad Aprile 2000, 69-72

Il funzionale di Totale Variazione nel problema dell'eliminazione del rumore da immagini digitali: dal modello al software matematico.

VALENTINA DE SIMONE

1. – Introduzione.

Uno dei principali problemi nell'elaborazioni di immagini riguarda la *ricostruzione* di un'immagine a partire da quella osservata. Un'immagine osservata mediante un dispositivo automatico è inevitabilmente contaminata da rumore, che ne altera le informazioni in essa contenute. Detta u l'immagine originale ed u_0 l'immagine osservata, con $u, u_0 \colon \Omega \subseteq \Re^2 \to \Re$, generalmente si assume che il modello di degradazione sia rappresentato da un'equazione integrale di Fredholm di prima specie che può essere scritta nella forma seguente:

$$u_0 = Ku + n\,, \tag{1}$$

dove $K : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ è l'operatore integrale di Fredholm che ha come nucleo una funzione nota, che rappresenta la degradazione legata allo strumento di acquisizione (telecamere, satellite, ...) o alle possibili interferenze dell'ambiente (fenomeni atmosferici), ed n il rumore, cioè la degradazione inevitabilmente introdotta nella trasmissione di segnali, di cui è nota solo la densità di probabilità.

Il problema della ricostruzione di un'immagine risulta un problema inverso mal posto nel senso definito da Hadamard, cioè le informazioni fornite da u_0 e dal modello (1) non sono in grado di garantire l'unicità della soluzione e/o la continuità dell'operatore inverso K^{-1}.

2. – Il modello matematico.

Per risolvere un problema mal posto, un approccio standard consiste nell'utilizzo di tecniche di regolarizzazione alla Tikhonov. Il problema, quindi, si trasforma nel calcolo del minimo di un funzionale del tipo:

$$\min_u \left(\alpha R(u) + \frac{1}{2} \| Ku - u_0 \|_2^2 \right). \tag{2}$$

In tal caso, uno dei problemi principali risulta la scelta del funzionale $R(u)$, legata alle caratteristiche che si richiedono nella soluzione. Qundo non ci sono particolari informazioni sulle immagini oppure sul dominio Ω, la più naturale assunzione apriori sulla soluzione u è la sua regolarità. Quindi, i classici funzionali di regolarizzazione sono essenzialmente basati sulla norma $\|\cdot\|_2$, e possono essere espressi nella forma $R(u) = \|Qu\|_2^2$, con Q operatore lineare (Identità, Laplaciano,...). Se, invece, si è interessati a ricostruire fedelmente i contorni dell'immagine conviene ricorrere alla norma $\|\cdot\|_1$, utilizzando, ad esempio, il funzionale *Totale Variazione* $TV(u) = \int_\Omega |\nabla u| d\omega$ [2].

Il principale problema legato alla risoluzione numerica del problema (2), con $R(u) = TV(u)$ (*problema TV*), è relativo alla non differenziabilità del funzionale TV nei punti in cui il gradiente si annulla. Per risolvere tale problema è possibile ricorrere all'utilizzo di metodi basati sull'approssimazione del funzionale TV con una famiglia di funzionali differenziabili nell'origine.

Nella tesi è stato proposto un metodo per il caso in cui $K = I$, problema di *denoising*, e per immagini costanti a tratti (*immagini a blocchi*), ipotesi non restrittiva se si pensa al processo di digitalizzazione delle immagini.

Si consideri la seguente famiglia di funzionali:

$$TV_\beta(u) = \beta \int_\Omega [\log(\cosh(u_x/\beta)) + \log(\cosh(u_y/\beta))]\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,, \tag{3}$$

con $\beta > 0$.

Con tale scelta, si sotituisce al problema TV una successione di problemi perturbati

$$\min_u T_n(u) = \min_u \left(\alpha TV_{\beta_n}(u) + \frac{1}{2} \|u - u_0\|_2^2 \right). \tag{4}$$

Il seguente teorema garantisce che la sequenza di soluzioni u_n del problema (4) converge alla soluzione $\overline{u}$ del problema TV.

TEOREMA 1. – *Se ogni $T_n(u)$ è BV-coercivo e semicontinuo inferiormente e la successione $(T_n(u))_{\beta_n}$ verifica le proprietà*:

(i) *Uniforme BV-coercività*,

(ii) *Consistenza, allora il problema TV è stabile rispetto alle perturbazioni in* (4), *cioè*

$$\lim_{n \to \infty} \|u_n - \overline{u}\|_{L^p(\Omega)} = 0\,. \tag{5}$$

Utilizzando il *principio della discrepanza* per la scelta del parametro di regolarizzazione e imponendo la condizione di ottimalità del primo ordine, il problema (4) è equivalente al seguente problema ellittico non lineare:

$$\begin{cases} \dfrac{u_{xx}}{\cosh^2(u_x/\beta)} + \dfrac{u_{yy}}{\cosh^2(u_y/\beta)} - \mu(u - u_0) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 \qquad \text{in } \partial\Omega \end{cases} \tag{6}$$

con μ moltiplicatore di Lagrange e $\beta = \beta_n$.

3. – Il modello numerico.

Tra i metodi numerici per la risoluzione del problema (6), uno computazionalmente efficiente, sia in ambiente di calcolo sequenziale che parallelo, è il metodo noto con il nome di *Time-marching*, che consiste nel sostituire a (6) il seguente problema parabolico:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{u_{xx}}{\cosh^2(u_x/\beta)} + \dfrac{u_{yy}}{\cosh^2(u_y/\beta)} - \mu(u-u_0) \\ u(x,y,0) = u_0(x,y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Uno dei vantaggi ottenuti nella formulazione in termini di equazione parabolica consiste nella possibilità di utilizzare tecniche numeriche standard, che hanno la capacità di individuare e preservare le discontinuità della soluzione (*tecniche shock capturing*) [3] e che permettono di ottenere schemi espliciti, particolarmente adatti ad un'implementazione in un ambiente di calcolo ad architettura avanzata.

Utilizzando il metodo alle differenze finite, in particolare uno schema conservativo di tipo *upwind*, il problema discreto associato a (7) risulta:

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \lambda\Bigg[&\tanh\left(\frac{u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n}{\beta\Delta x}\right) - \tanh\left(\frac{u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n}{\beta\Delta x}\right) + \\ &+\tanh\left(\frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n}{\beta\Delta x}\right) - \tanh\left(\frac{u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n}{\beta\Delta x}\right)\Bigg] - \mu^n\Delta t(u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^0)\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Le condizioni di Neumann sono ricavate imponendo un prolungamento per riflessione dell'immagine lungo la frontiera e il parametro μ^n è calcolato discretizzando il parametro lagrangiano con una formula di quadratura trapezoidale.

Un risultato fondamentale, che permette di ottenere insieme alla consistenza dello schema anche la convergenza, risulta il seguente teorema sulla stabilità.

TEOREMA 2. – *Se* $\mu^n \geq 0\ \forall n \geq 0$, *e, posto* $\bar{\mu} = \max\limits_{k=0,\ldots,n}\{\mu^k\}$ *se risulta*

$$\frac{4}{\beta}\frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \bar{\mu}\Delta t \leq 1 \tag{9}$$

allora lo schema (8) *risulta stabile rispetto alla norma* $\|\cdot\|_\infty$.

Poiché un'immagine digitale definisce essa stessa una griglia in cui $\Delta x = \Delta y = 1$, la condizione di stabilità definita nel teorema precedente diventa

$$\Delta t\left(\frac{4}{\beta} + \bar{\mu}\right) \leq 1\,. \tag{10}$$

La (10) fornisce l'idea di una scelta adattativa del passo di discretizzazione temporale, al fine di verificare la condizione di stabilità durante tutta la procedura senza penalizzare la velocità di convergenza con una scelta apriori di un Δt piccolo a sufficienza.

4. – Il software matematico.

È noto che lo sviluppo di software efficiente deve tener conto delle caratteristiche dell'ambiente computazionale di sviluppo. Questo legame è ancora più forte nell'ambito dell'*Elaborazione di immagini*, dove un qualsiasi solver ha bisogno di un ambiente software per l'acquisizione, visualizzazione e manipolazione delle immagini. A tal proposito, il software sequenziale è stato realizzato in ambiente *Khoros* ed è stato sperimentato su numerosi problemi test. Dai risultati ottenuti si evince l'effettiva capacità di ricostruire i contorni di immagini a blocchi e anche un buon comportamento del software su immagini che non appartengono a tale classe.

La necessità di sviluppare il software parallelo nasce dalle esigenze di numerose applicazioni (robotica, TV digitale,...) di elaborare in *tempo reale* una o più immagini. Come già detto, l'algoritmo utilizzato presenta un alto grado di parallelismo intrinseco [1]. Infatti, la versione parallela è stata ottenuta utilizzando la strategia di decomposizione della griglia; in questo modo, la strategia di comunicazione tra i processori per realizzare un *overlapping* di ordine 1 della griglia locale è basata esclusivamente su comunicazioni di tipo locale.

Il software parallelo, sviluppato in *ANSI C* per *MPI*, è stato sperimentato su diverse architetture parallele di tipo MIMD a memoria distribuita: l'*Intel Paragon L38* del California Institute of Tecnology a 512 nodi, l'*IBM SP2* a 12 nodi e il sistema *Beowulf* a 16 nodi del Centro di Ricerche per il Calcolo Parallelo e i Supercalcolatori (CPS) del CNR di Napoli. I risultati ottenuti confermano la bontà del software sia in termini di efficienza che di scalabilità.

BIBLIOGRAFIA

[1] CECCARELLI M., D'AMORE L, DE SIMONE V. e MURLI A., *Software parallelo per l'Elaborazione di Immagini*, Proc. del convegno Calcolo ad Alte Prestazioni in Italia (CAPI'98) (1998).

[2] RUDIN L., OSHER S. e FADEMI E., *Nonlinear total variation noise removal algorithms*, Physica D, **60** (1992), 259-268.

[3] LEVEGUE R. J., *Numerical Methods for Conservation Laws*, Birkhauser Verlag (1992).

Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Napoli
e-mail: desimone@matna2.dma.unina.it
Dottorato di Matematica Applicata e Informatica
(Sede Ammnistrativa: Napoli) - Ciclo X
Direttore di Ricerca: Prof. Almerico Murli, Università di Napoli