Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Carla Durazzi

Metodi lagrangiani per problemi di controllo ottimo nel discreto

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1S, p. 73–76.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_73_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. III-A, Supplemento ad Aprile 2000, 73-76

Metodi lagrangiani per problemi di controllo ottimo nel discreto.

CARLA DURAZZI

1. – Introduzione.

Molti problemi del mondo reale possono essere modellizzati come problemi di controllo ottimo nel continuo: essi sono definiti da un sistema dinamico descritto da equazioni differenziali in cui compaiono *«vettori di stato»* e *«di controllo»*, da determinare in modo tale che vengano soddisfatti i vincoli, costituiti dallo stesso sistema di equazioni differenziali (ed eventuali altri vincoli), e inoltre sia minimizzato un assegnato funzionale (detto *«di costo»*).

Tali problemi sono stati ampiamente studiati in passato seguendo vari approcci quali il calcolo delle variazioni (principio del massimo di Pontryagin), la programmazione dinamica e la programmazione matematica.

Nella tesi sono stati presi in considerazione problemi di controllo ottimo nel discreto seguendo la strada della programmazione matematica (MP).

L'avvento infatti di nuovi metodi per problemi MP, quali i *metodi di tipo «trust region»*, lo sviluppo del calcolo parallelo e la riconsiderazione del metodo di penalizzazione interna (che ha portato al *«metodo del punto interno»*), riaccendono l'interesse per l'approccio della programmazione matematica nella soluzione di problemi di controllo ottimo nel discreto che, solitamente, sono di grandi dimensioni.

È stata esaminata la trascrizione dei problemi di controllo ottimo in problemi di programmazione matematica in due forme differenti: nella prima trascrizione il vettore delle incognite è costituito sia dai vettori di stato che da quelli di controllo (in ogni istante del processo), mentre nella seconda trascrizione compaiono solo i vettori di controllo ed eventualmente lo stato iniziale.

La tesi prende in esame diverse formulazioni di problemi di controllo ottimo nel discreto, partendo dai problemi di controllo quadratico fino ad arrivare al caso generale di problemi non lineari. Per la loro risoluzione sono stati proposti metodi classificabili come *metodi lagrangiani*.

2. – Problemi di controllo ottimo discreto e programmazione matematica.

Sia assegnato un sistema dinamico discreto

$$x_{i+1} = Ex_i + Fu_i \qquad \text{per } i = 0, 1, \ldots, k-1 \tag{1}$$

dove E ed F sono matrici costanti, x_i sono i vettori di stato e u_i i vettori di controllo o *input* e x_0 e x_k soddisfano le condizioni

$$G_0 x_0 = c_0 \qquad G_k x_k = c_k \tag{2}$$

con G_0 e G_k matrici costanti di dimensione $l_0 \times n$ e $l_k \times n$, di rango rispettivamente l_0 ed l_k. Il problema di controllo ottimo quadratico discreto consiste nel determinare $(X^*, U^*) = (x_0^{*T}, x_1^{*T}, \ldots, x_k^{*T}, u_0^{*T}, \ldots, u_{k-1}^{*T})^T$ in modo tale che siano soddisfatti i vincoli (1)-(2) e che sia minizzato

$$J(X, U) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k-1} (x_i^T \widetilde{Q}_x x_i + u_i^T \widetilde{Q}_u u_i) + \frac{1}{2} x_k^T L x_k \tag{3}$$

dove $\widetilde{Q}_x$ ed L sono matrici $n \times n$ simmetriche e semidefinite positive, $\widetilde{Q}_u$ è una matrice $m \times m$ simmetrica e definita positiva.

Il problema (1)-(3) può essere riscritto in programmazione quadratica (QP) sotto le due differenti forme, descritte nell'introduzione, che si differenziano per la dimensione e la struttura delle matrici coinvolte.

Riprendendo la teoria sviluppata in [1], sotto le ipotesi che il sistema dinamico sia completamente controllabile e che $k \geqslant n$, sono state determinate condizioni (sufficienti) per l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema trascritto in QP: tali condizioni assicurano anche la convergenza del metodo di Hestenes che permette di determinare la soluzione numerica del problema. A tale proposito, un risultato che vale per entrambe le trascrizioni è il seguente

TEOREMA 1. – *Se* $l_0 + l_k \geqslant n$ *e* $\begin{pmatrix} G_0 \\ G_k E^k \end{pmatrix}$ *ha rango massimo, allora la soluzione ottimale del problema è unica e il metodo di Hestenes converge.*

In particolare, il metodo di Hestenes combinato con il metodo dei gradienti coniugati, grazie ad un'opportuna tecnica di normalizzazione, risulta adatto per calcolatori paralleli ed efficiente nella soluzione di problemi di controllo ottimo nel discreto nel caso in cui si utilizzi la seconda trascrizione.

Successivamente si sono presi in esame problemi di controllo ottimo con istante iniziale assegnato, sistema dinamico lineare e vettore di controllo limitato. Le due trascrizioni in problema di programmazione matematica presentano una struttura analoga a quella dei problemi in [2, 3] per i quali si propone un metodo di tipo «trust region».

L'applicazione di tale metodo alle trascrizioni ottenute ha portato, nella prima trascrizione, a riesaminare la teoria di convergenza, tenendo conto del fatto che nel problema di controllo solo alcune variabili sono vincolate da disuguaglianze e che, essendo il sistema dinamico lineare, l'ipotesi di lineare indipendenza dei gradienti dei vincoli di uguaglianza è automaticamente soddisfatta: ciò comporta una semplificazione del metodo. Inoltre nella seconda trascrizione, si è proposta una tecnica per il calcolo del gradiente, in modo da sfruttare la speciale struttura del problema di controllo.

Infine si è considerato il problema di controllo discreto nella sua formulazione più generale, cioè con vincoli (di uguaglianza e disuguaglianza) e funzionale non lineari: questo, riscritto in MP secondo la prima trascrizione, diventa

$$\min_{\substack{h(z)=0 \\ g(z)\leq 0}} f(z) \tag{4}$$

dove $z = (x_0^T, \ldots, x_k^T, u_0^T, \ldots, u_{k-1}^T)^T$ o equivalentemente

$$\min_{\substack{h(z)=0 \\ g(z)+s=0 \\ s\geq 0}} f(z)\,. \tag{5}$$

Tale trascrizione ha portato ad approfondire il metodo del punto interno per problemi di tipo (4), a partire da un algoritmo (che chiameremo IP) che si basa sull'idea di applicare il metodo di Newton alle condizioni di Karush-Kuhn-Tucker perturbate (vedi [5]). Le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker perturbate per (5) possono essere scritte come

$$H(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma\mu e \end{pmatrix}$$

$$w_i,\, s_i > 0 \qquad \text{per} \qquad i = 1, \ldots, q$$

dove

$$H(v) = \begin{bmatrix} \nabla f(z) + \nabla h(z)\,\lambda + \nabla g(z)\,w \\ h(z) \\ g(z) + s \\ SWe \end{bmatrix},$$

λ e w sono i moltiplicatori rispettivamente delle uguaglianze e delle disuguaglianze, q esprime il numero di disuguglianze, $v = (z^T, \lambda^T, w^T, s^T)^T$, $e \in R^q$ ha tutte le componenti uguali ad 1, S e W sono matrici diagonali con elementi uguali, rispettivamente, a s_i e w_i ed infine $\mu > 0$ è la perturbazione.

L'algoritmo IP consiste nel risolvere l'equazione di Newton

$$H'(v^{(\nu)})\,\Delta v^{(\nu)} = -H(v^{(\nu)}) + \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_\nu \mu_\nu e \end{pmatrix}$$

dove $H'(v)$ è lo jacobiano di $H(v)$ e μ è scelta come $\mu_1 = s^T w/q$. L'iterato successivo viene poi aggiornato ($v^{(\nu+1)} = v^{(\nu)} + \alpha_\nu \Delta v^{(\nu)}$) in modo che il passo α_ν soddisfi criteri per mantenere la positività di w_i e s_i ed una assegnata funzione di merito decresca sufficientemente: quest'ultima condizione è garantita da un procedimento di backtracking basato sulla formula di Armijo.

L'analisi del legame tra tale metodo e la classe dei metodi di Newton inesatti (vedi [4]) ha portato ad interpretare l'algoritmo IP in un quadro più ampio, permettendo di utilizzare una tecnica più generale di backtracking (algoritmo IPB) e di introdurre una diversa espressione per la perturbazione μ data da $\mu_2 = \|H(v)\|_2/\sqrt{q}$ (algoritmo IPN). La diversa scelta introdotta per μ è motivata dal fatto che in pratica si osserva che i passi α_ν possono diventare molto piccoli se le relative direzioni di Newton «spingono» gli iterati troppo vicino al bordo della regione di ammissibilità.

Risulta allora utile poter determinare direzioni di discesa diverse, modificando la scelta di μ secondo μ_2.

È stata sviluppata la teoria di convergenza per entrambi gli algoritmi (IPB ed IPN), sotto le stesse ipotesi utilizzate per IP in [5].

Gli algoritmi presi in esame sono inoltre stati applicati a problemi test di controllo ottimo discreto con lo scopo di valutare il loro comportamento: in particolare, le prove numeriche hanno evidenziato il ruolo significativo che riveste il passo α_ν. Se, infatti, questo diventa troppo piccolo con IP, allora il numero di iterazioni aumenta notevolmente. In tale eventualità, l'algoritmo IPN permette, negli esempi considerati, di determinare direzioni di discesa diverse che portano ad un passo più grande e dunque a più rapida convergenza. Ciò evidenzia che, nella risoluzione di problemi di controllo ottimo nel discreto tramite il metodo del punto interno, risulta utile disporre di diverse strategie per la scelta della direzione di discesa.

I risultati di quest'ultima parte della tesi sono contenuti in un lavoro, accettato per la pubblicazione su *Journal of Optimization Theory and Applications*.

BIBLIOGRAFIA

[1] CANON M. D., CULLUM C. D. e POLAK E., *Theory of Optimal Control and Mathematical Programming*, Mc Graw-Hill, New York (1970).

[2] CONN A. R., GOULD N. I. M. e TOINTS PH. L., *Global convergence of a class of trust region algorithms for optimization with simple bounds*, SIAM J. Numer. Anal., **25** (1988), 433-460.

[3] CONN A. R., GOULD N. I. M. e TOINTS PH. L., *A globally convergent augmented lagrangian algorithm for optimization with general constraints and simple bounds*, SIAM J. Numer. Anal., **28** (1991), 545-572.

[4] EISENSTAT S. C. e WALKER H. F., *Globally convergent inexact Newton methods*, SIAM J. Optim., **4** (1994), 393-422.

[5] EL-BAKRY A. S., TAPIA R. A., TSUCHIYA T. e ZHANG Y., *On the formulation and theory of Newton interior-point method for nonlinear programming*, JOTA, **89** (1996), 507-541.

Dipartimento di Matematica, Università di Ferrara, e-mail: dzc@dns.unife.it
Dottorato in Matematica Computazionale (sede amministrativa: Padova) - Ciclo XI
Direttore di ricerca: Prof. Ilio Galligani (Università di Bologna)