Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

François Bille Ebobisse

Proprietà fini delle funzioni con deformazione limitata ed applicazioni a problemi variazionali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1S, p. 77–80.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_77_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. III-A, Supplemento ad Aprile 2000, 77-80

Proprietà fini delle funzioni con deformazione limitata ed applicazioni a problemi variazionali.

FRANÇOIS EBOBISSE BILLE

1. – Introduzione.

Questa tesi è dedicata allo studio dello spazio delle funzioni BD a deformazione limitata ed all'uso di tale spazio in alcuni problemi non convessi del calcolo delle variazioni. Dato Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, lo spazio $BD(\Omega)$ è così definito:

$$BD(\Omega) := \{u \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^n) : Eu := (Du + Du^T)/2 \in \mathcal{M}(\Omega, M_s^{n \times n})\},$$

dove Du indica la derivata distribuzionale di u, $\mathcal{M}(\Omega, M_s^{n \times n})$ indica lo spazio delle misure di Radon a valori nelle matrici simmetriche $n \times n$ e a variazione totale finita. Tale spazio è stato introdotto da Matthies, Christiansen e Strang, e indipendentemente da Suquet, ed è stato intensivamente studiato negli anni '70 e '80 allo scopo di dare una rigorosa formulazione matematica dei problemi posti dal comportamento dei materiali plastici.

La ricerca attuale fatta su BD è motivata da recenti studi relativi allo spazio BV delle funzioni a variazione limitata, in collegamento con i cosiddetti problemi con discontinuità libera. Quest'ultima terminologia è stata introdotta da De Giorgi per designare i problemi di minimizzazione del tipo:

$$(P) \qquad \min\left\{ \int_{\Omega \setminus K} f(x, u, \nabla u)\, dx + \lambda \mathcal{H}^{n-1}(K) \right\}$$

(al variare di K tra i sottoinsiemi chiusi di $\overline{\Omega}$ e di u in $\mathcal{C}^1(\Omega \setminus K, \mathbb{R}^k)$), relativi ad alcuni fenomeni quali la segmentazione d'immagini, la meccanica delle fratture, etc.

Per i materiali linearmente elastici, la densità di energia elastica rappresentata in (P) da f è una forma quadratica nel gradiente che dipende solo da $\mathcal{E}u = (\nabla u + \nabla u^T)/2$. In questo caso, l'ambiente naturale per risolvere questi problemi è lo spazio $BD(\Omega)$ o qualche variante di esso.

Lo scopo di questa tesi è stato quello di analizzare il possibile uso di $BD(\Omega)$ in problemi variazionali con discontinuità libere, in analogia a quanto già fatto negli ultimi 10 anni per gli spazi BV. Nella prima parte della tesi, abbiamo fatto una rassegna completa e aggiornata delle proprietà dello spazio $BD(\Omega)$, oggetto di alcune classiche monografie (quale ad esempio quella di Temam [5]) ormai non più aggiornate.

2. – Descrizione analitica del contenuto della tesi.

CAPITOLO 1. – Questo capitolo è essenzialmente introduttivo, e dedicato alle proprietà di base degli spazi funzionali *BV* e *BD*. In particolare, vengono discusse in dettaglio le proprietà dell'operatore di traccia, le diseguaglianze tipo Poincaré in *BD*, ed alcune conseguenze che avranno un importante ruolo nel seguito.

CAPITOLO 2. – In questo capitolo vengono discussi risultati più recenti sullo spazio *BD*, ottenuti da Ambrosio, Bellettini, Coscia e Dal Maso. In particolare, viene studiata la struttura della misura Eu, parte simmetrica della derivata nel senso delle distribuzioni, e vengono discusse le proprietà integralgeometriche dell'insieme di salto approssimato; tali proprietà verrano spesso usate nel seguito per ottenere riduzioni al caso unidimensionale (nel quale gli spazi *BV* e *BD* coincidono). Un esempio di tale riduzione si ha nella dimostrazione del teorema di compattezza di Bellettini-Coscia-Dal Maso [3] per le funzioni *SBD* speciali a deformazione limitata.

CAPITOLO 3. – Questo capitolo contiene il primo risultato della tesi.

TEOREMA 2.1. – *Sia $\Omega = \mathbb{R}^n$ oppure un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con il bordo lipschitziano e $u \in BD(\Omega)$. Allora per ogni $\lambda > 0$, esiste una funzione lipschitziana $v_\lambda : \Omega \to \mathbb{R}^n$ con $lip(v_\lambda) \leqslant C(n, \Omega)\lambda$ tale che:*

$$\mathcal{L}^n(\{x \in \Omega : v_\lambda(x) \neq u(x)\}) \leqslant \frac{C(n, \Omega)}{\lambda} \|u\|_{BD(\Omega)}, \tag{1}$$

ove $C(n, \Omega)$ è una costante positiva che dipende solo da n e da Ω.

Usando questo teorema si dimostra anche la differenziabilità quasi ovunque, in senso approssimato, delle funzioni *BD*. Tale risulato, gia ottenuto da Ambrosio-Coscia-Dal Maso [1] e, indipendentemente, da Hajłasz, viene ulteriormente perfezionato in questo teorema con la stima quantitativa (1) dell'errore che si commette nel voler approssimare, nel senso di Lusin, una funzione *BD* con funzioni lipschitziane; grazie al teorema di Stepanoff l'esistenza quasi ovunque del differenziale approssimato segue immediatamente.

Gli ingredienti usati nella dimostrazione di questo teorema sono la funzione massimale della misura Eu, la versione locale della diseguaglianza tipo Poincaré per funzioni *BD* ed il teorema di ricoprimento di Besicovitch, che consentono di stimare la misura dell'insieme eccezionale $\{v_\lambda \neq u\}$.

CAPITOLO 4. – In questo capitolo viene intrapreso lo studio dei funzionali integrali in *BD*. Al di fuori dell'ambito convesso già ampiamente studiato in letteratura, il problema della semicontinuità e del rilassamento per tali funzionali è ancora largamento aperto e presenta difficoltà non indifferenti a causa di vari problemi ancora irrisolti inerenti le funzioni *BD*, ad esempio quelli relativi alla struttura della parte «Cantoriana» della misura Eu ed alla relazione tra insieme di discontinuità ed insieme di salto (problemi invece ben risolti in ambito BV). Il principale, e originale, risultato del capitolo verte sulla semicontinuità rispetto alla topologia $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ del funzionale (ove $\mathcal{E}u$ indica la parte simmetrica del differenziale approssimato di u)

$$u \to \int_\Omega f(\mathcal{E}u)\, dx \tag{2}$$

nello spazio $LD(\Omega)$ delle funzioni $u \in BD(\Omega)$ tali che Eu è assolutamente continuo rispetto alla misura di Lebesgue in Ω.

TEOREMA 2.2. – *Sia* $f : M_s^{n \times n} \to [0, +\infty[$ *una funzione di Borel che verifica le condizioni seguenti:*

(H1) $C_1 \|\xi\| - C_2 \leq f(\xi) \leq C_3 (1 + 1\|\xi\|)$ *per ogni* $\xi \in M_s^{n \times n}$;

(H2) f *è quasi convessa symmetrica, cioè*

$$\fint_D f(\xi + \mathcal{E}\varphi(x))\, dx \geq f(\xi)$$

per ogni aperto limitato D *di* Ω, $\xi \in M_s^{n \times n}$ *e* $\varphi \in W_0^{1,\infty}(D, \mathbb{R}^n)$.

Allora il funzionale (2) *è semicontinuo inferiormente in* $LD(\Omega)$ *respetto alla norma* L^1.

OSSERVAZIONE 2.3. – La condizione (H2), più debole della convessità, è legata alla quasi convessità nel senso di Morrey in quanto f verifica (H2) se e solo se $f \circ \pi$ è quasi convessa nel senso classico, dove π indica la proiezione sulle matrici simmetriche. Quindi la (H2) è anche condizione necessaria per la semicontinuità inferiore di (2).

Questo teorema viene dimostrato con la tecnica «dell'esplosione» introdotta nell'ambito della semicontinuità inferiore dei funzionali integrali negli spazi di Sobolev ed in BV rispettivamente da Fonseca-Müller e da Ambrosio-Dal Maso.

Adattando un risultato di Šverák, si costruisce un esempio di funzione non convessa che verifica (H2). Per fare ciò, si introduce il concetto d'invillupo quasi convesso simmetrico di f caratterizato da:

$$SQf(\xi) = \inf \left\{ \fint_D f(\xi + \mathcal{E}\varphi(x))\, dx;\ \varphi \in W_0^{1,\infty}(D, \mathbb{R}^n) \right\},$$

per ogni aperto limitato D di Ω, $\xi \in M_s^{n \times n}$. Si dimostra il seguente teorema

TEOREMA 2.4. – *Sia* $p \geq 1$, $K = \{I, -I\}$ *e sia* $f : M_s^{2 \times 2} \to [0, +\infty[$ *definita da:*

$$f(\xi) := d(\xi, K)^p = \min(\|\xi - I\|^p, \|\xi + I\|^p);$$

ove I è la matrice identità in $M^{2\times 2}$. Allora, $SQf(0) > 0$. In particolare, SQf non è convessa.

CAPITOLO 5. – In questo capitolo si studia un problema di omogeneizzazione per funzionali del tipo

$$F_\varepsilon(u, \Omega) := \int_\Omega f\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{dEu}{d\mu_\varepsilon}\right) d\mu_\varepsilon$$

ove le misure μ_ε sono ottenute per riscalamento a partire da una fissata misura 1-periodica m, il cui supporto può anche essere di misura nulla nel senso di Lebesgue. Generalizzando un precedente risultato di Ansini, Braides e Chiadò Piat [2], relativo al caso di funzionali dipendenti da tutte le componenti della derivata, si mostra che il Γ-limite per $\varepsilon \downarrow 0$ dei funzionali F_ε ha una rappresentazione integrale in $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e in $BD(\Omega)$, a seconda delle condizioni di crescita soddisfatte da f.

BIBLIOGRAFIA

[1] AMBROSIO L., COSCIA A., DAL MASO G., *Fine properties of functions with bounded deformation*, Arch. Rat. Mech. Anal., **139** (1997) 210-238.

[2] ANSINI N., BRAIDES A., CHIADÒ PIAT V., *Homogenization of periodic multi-dimensional structures*, Boll. Umi.

[3] BELLETTINI G., COSCIA A., DAL MASO G., *Compactness and lower semicontinuity in $SBD(\Omega)$*, Math. Z., **228** (1998), 337-351.

[4] EBOBISSE F., *Lusin Type Approximation of BD Functions*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **129 A** (1999), 1-9.

[5] TEMAM R., *Mathematical Problems in Plasticity*, Bordas, Paris (1985).

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, Via F. Buonarroti, 2 - 56127 Pisa
e-mail: ebobisse@paley.dm.unipi.it

Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Pisa) - Ciclo X
Direttore di ricerca: Prof. Luigi Ambrosio, Scuola Normale Superiore di Pisa