Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Priscilla Gorelli

Problemi di risolubilità di operatori differenziali invarianti sul gruppo di Heisenberg

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1S, p. 89–92.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_89_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. III-A, Supplemento ad Aprile 2000, 89-92

Problemi di risolubilità di operatori differenziali invarianti sul gruppo di Heisenberg.

PRISCILLA GORELLI

1. – Introduzione.

Il gruppo di Heisenberg tridimensionale H_1 è un gruppo di Lie, diffeomorfo a $\mathbf{R}^3$, in cui il prodotto è definito da $(x, y, t)(x', y', t') = (x + x', y + y', t + t' + 2(x'y - xy'))$.

Una base per la sua algebra di Lie $\mathbf{h}_1$ è costituita dai campi invarianti a sinistra

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial t}, \qquad Y = \frac{\partial}{\partial y} - 2x\frac{\partial}{\partial t}, \qquad T = \frac{\partial}{\partial t}$$

e le relazioni di commutazione sono $[X, T] = [Y, T] = 0$, $[X, Y] = -4T$. Il *sublaplaciano* è l'operatore invariante a sinistra su H_1 definito da

$$L = \frac{1}{4}(X^2 + Y^2).$$

Nella tesi diamo alcune tecniche che ci permettono di trovare soluzioni fondamentali di operatori invarianti a sinistra su H_1 del tipo

$$D = P(-iT, -L), \tag{1}$$

dove P è un polinomio in due variabili a coeffcienti complessi. L e T commutano fra loro e generano l'algebra degli operatori differenziali su H_1 che sono invarianti rispetto alle traslazioni sinistre e alle rotazioni.

Il problema della risolubilità e dell'esistenza di soluzioni fondamentali per tali operatori è stato già risolto nel caso in cui P abbia grado uno. In [4] e [2] si mostra che l'operatore $-L + i\alpha T + c$, α, $c \in \mathbf{C}$, ha una soluzione fondamentale a meno che non si abbia $c = 0$ e $\alpha = 2m + 1$, per qualche intero m. In questo caso esso non è nemmeno localmente risolubile.

Formuliamo la seguente congettura: un operatore D del tipo (1) è localmente risolubile se e solo se $P(\lambda, \xi)$ non è divisibile per $\xi - (2m+1)\lambda$, per qualche $m \in \mathbf{Z}$. Nella tesi mostriamo che tale congettura è vera con certe restrizioni su P e, nel caso in cui si ha risolubilità, riusciamo anche a costruire una soluzione fondamentale di D. Poiché il gruppo di Heisenberg è P-convesso rispetto a tutti gli operatori differenziali invarianti a sinistra (cfr. [1]), l'esistenza di una soluzione fondamentale di D implica che D è globalmente risolubile.

2. – Il ventaglio di Heisenberg.

Sia Δ lo spettro di Gelfand dell'algebra di Banach $L^1_{rad}(H_1)$ delle funzioni radiali integrabili su H_1. Nel secondo capitolo della tesi si dimostra che la topologia di Gelfand su Δ coincide con quella indotta dalla topologia euclidea di $\mathbf{R}^2$ sull'insieme

$$F = \{(\lambda, |\lambda|(2m+1)) \in \mathbf{R}^2 : \lambda \neq 0, \ m \in \mathbf{N}\} \cup \{(0, \xi) \in \mathbf{R}^2 : \ \xi \geqslant 0\},$$

che è detto il *ventaglio di Heisenberg*.

Chiameremo il polinomio $P(\lambda, \xi)$ il *simbolo* di $D = P(-iT, -L)$. Osserviamo che i simboli degli operatori non risolubili trovati da Folland e Stein sono esattamente quei polinomi che si annullano identicamente sulle semirette oblique del ventaglio. In effetti, c'è una stretta relazione tra la risolubilità di D e il modo in cui la curva algebrica definita dal simbolo di D interseca F. Per studiare tutti gli operatori del tipo (1), li raggruppiamo in classi, mettendo in una stessa classe quegli operatori i cui simboli definiscono curve aventi lo stesso tipo di intersezioni con F.

Valgono i seguenti fatti.

PROPOSIZIONE 1.

(*a*) *Se $P(\lambda, \xi)$ si annulla identicamente su una semiretta obliqua di F, allora D non è localmente risolubile.*

(*b*) *Se $P(\lambda, \xi)$ si annulla identicamente sulla semiretta verticale di F, allora $D = T^h D_1$ e D è localmente risolubile se e solo se lo è D_1.*

Ci limiteremo quindi a esaminare quegli operatori i cui simboli definiscono curve che intersecano ogni semiretta di F al più in un numero finito di punti.

3. – Costruzione di una soluzione fondamentale.

Usando la formula di inversione della trasformata di Fourier su H_1, troviamo la seguente espressione formale per una soluzione fondamentale di D: per ogni funzione di Schwartz g su H_1,

$$\langle K, g\rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{H_1} \int_{\mathbf{R}} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\varphi_{-\lambda, m}(v)\, g(v)}{P(\lambda, |\lambda|(2m+1))} |\lambda|\, d\lambda\, dv \tag{2}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbf{R}} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\widehat{g}(-\lambda, m, m)}{P(\lambda, |\lambda|(2m+1))} |\lambda|\, d\lambda\,,$$

con

$$\varphi_{\lambda, m}(x, y, t) = e^{-i\lambda t} e^{-|\lambda|(x^2+y^2)} L_m^{(0)}(2|\lambda|(x^2+y^2)),$$

dove $L_m^{(0)}(x)$ è l'm-simo polinomio di Laguerre di indice $\alpha = 0$, definito da

$$L_m^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m+\alpha}{m-k} \frac{(-x)^k}{k!}$$

$$\widehat{g}(\lambda, m, m) = \int_{H_1} \varphi_{\lambda, m}(v)\, g(v)\, dv\,.$$

Modificando opportunamente l'espressione di K otteniamo una soluzione fondamentale temperata di D nei seguenti tre casi.

Primo caso: il simbolo di D non si annulla su F. Abbiamo il seguente

TEOREMA 1. – *Sia $D = P(-iT, -L)$ tale che $P(\lambda, \xi)$ non si annulla su F. Allora una soluzione fondamentale di D è la distribuzione temperata* (2).

Secondo caso: la curva $P(\lambda, \xi) = 0$ interseca solo un numero finito di semirette oblique di F, fuori dall'origine. Per ottenere una soluzione fondamentale in questo caso dobbiamo modificare (2) e per fare ciò abbiamo bisogno della seguente

DEFINIZIONE 2. – *Data una funzione C^∞, $\varphi(x)$, definiamo*

$$R_{h,\alpha}(\varphi(x)) = \varphi(x) - \sum_{j=0}^{h-1} \frac{\varphi^{(j)}(\alpha)}{j!}(x-\alpha)^j.$$

Se $g(x)$ è una funzione razionale con un polo di ordine h in α e I è un intervallo contenente α, allora $\varphi \mapsto \int_I R_{h,\alpha}(\varphi)\, g(x)\, dx$ è una distribuzione ben definita.

TEOREMA 2. – *Sia $D = P(-iT, -L)$ tale che $P(\lambda, |\lambda|(2m+1)) = 0$ solo in un numero finito di punti, $(\lambda_{j,h}, |\lambda_{j,h}|(2m_j+1))$, $j = 1, \ldots, r$, $h = 1, \ldots, r_j$, ciascuno giacente sulla curva $\xi = |\lambda|(2m_j+1)$ e avente molteplicità $\mu_{j,h}$. Supponiamo inoltre che $P(0, \xi) \neq 0$ per ogni $\xi \geqslant 0$.*

Siano $I_{j,h}$ intervalli centrati in $\lambda_{j,h}$ tali che $I_{j,h} \cap I_{j,h'} = \emptyset$ se $h \neq h'$. Allora una soluzione fondamentale di D è

$$\langle K, g\rangle = \frac{1}{(2\pi)^2}\left(\sum_{j=1}^{r} \langle K_{m_j}, g\rangle + \sum_{m \notin \{m_1, \ldots, m_r\}} \langle K_m, g\rangle\right), \qquad g \in \mathcal{S}(H_1)$$

dove

$$\langle K_m, g\rangle = \int_{\mathbf{R}} \frac{\widehat{g}(-\lambda, m, m)\,|\lambda|\, d\lambda}{P(\lambda, |\lambda|(2m+1))} \qquad \textit{if } m \notin \{m_1, \ldots, m_r\}$$

$$\langle K_{m_j}, g\rangle = \int_{\cup I_{j,h}} \frac{R_{\mu_{j,h}, \lambda_{j,h}}(\widehat{g}(-\lambda, m_j, m_j))\,|\lambda|\, d\lambda}{P(\lambda, |\lambda|(2m_j+1))}$$

$$+ \int_{\mathbf{R}\setminus \cup I_{j,h}} \frac{\widehat{g}(-\lambda, m_j, m_j)\,|\lambda|\, d\lambda}{P(\lambda, |\lambda|(2m_j+1))}\,.$$

Nel terzo caso, supponiamo che $P(\lambda, \xi)$ si annulli nell'origine, quindi $D =$

$D_k(-iT,\ -L)+D_{k+1}(-iT,\ -L)+\cdots+D_n(-iT,\ -L)$, dove D_j è la parte omogenea di grado j di D. Troviamo una soluzione fondamentale di D solo se aggiungiamo l'ipotesi tecnica che il monomio L^k in $D_k(-iT,\ -L)$ abbia coefficiente non nullo.

TEOREMA 3. – *Sia*

$$P(\lambda,\ \xi)=c_{\overline{\alpha}}\,\xi^k+\sum_{|\alpha|=k,\ \alpha\neq\overline{\alpha}} c_\alpha\,\xi^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2}+\sum_{|\alpha|>k} c_\alpha\,\xi^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2},$$

$c_\alpha\in\mathbf{C}$, $c_{\overline{\alpha}}\neq 0$, *e supponiamo che* $P(\lambda,\ \xi)$ *si annulli su* F *solo nell'origine e in un numero finito di punti,* $(\lambda_j,\ |\lambda_j|(2m_j+1))$, $j=1,\ \ldots,\ r$, *con molteplicità* μ_j. *Sia* δ *una costante positiva sufficientemente piccola e siano* I_j *intervalli centrati in* λ_j *tali che* $I_j\cap\left(-\dfrac{\delta}{2m_j+1},\ \dfrac{\delta}{2m_j+1}\right)=\emptyset$ *e* $I_j\cap I_{j'}=\emptyset$ *se* $m_j=m_{j'}$. *Poniamo* $B_m=\mathbf{R}\setminus\left[\left(-\dfrac{\delta}{2m_j+1},\ \dfrac{\delta}{2m_j+1}\right)\cup\bigcup_{m=m_j} I_j\right]$.

Allora una soluzione fondamentale di D *è la distribuzione*

$$\begin{aligned}\langle K,\ g\rangle=\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{m=0}^{+\infty}\Bigg\{&\int_{B_m}\frac{\widehat{g}(-\lambda,\ m,\ m)\,|\lambda|\,d\lambda}{P(\lambda,\ |\lambda|(2m+1))}\\ &+\int_{|\lambda|<\frac{\delta}{2m+1}}\frac{R_{k+N_m-1,\,0}(\widehat{g}(-\lambda,\ m,\ m))\,|\lambda|\,d\lambda}{P(\lambda,\ |\lambda|(2m+1))}\Bigg\}\\ &+\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{j=1}^{r}\int_{I_j}\frac{R_{\mu_j,\,\lambda_j}(\widehat{g}(-\lambda,\ m_j,\ m_j))\,|\lambda|\,d\lambda}{P(\lambda,\ |\lambda|(2m_j+1))},\qquad g\in\mathcal{S}(H_1)\end{aligned}$$

dove $N_m=0$ *tranne che per un numero finito di* $m\in\mathbf{N}$.

Le dimostrazioni dei risultati ottenuti nella tesi, si possono trovare in [3].

BIBLIOGRAFIA

[1] W. CHANG, *Invariant Differential Operators and P-convexity of Solvable Lie Groups*, Adv. Math., **46** (1982), 284-304.

[2] G. B. FOLLAND, E. M. STEIN, *Estimates for the* $\overline{\partial}_b$ *complex and analysis on the Heisenberg group*, Comm. Pure Appl. Math., **27** (1974), 429-522.

[3] P. GORELLI, *Fundamental solutions for translation and rotation invariant differential operators on the Heisenberg group*, to appear on Colloquium Mathematicum.

[4] E. M. STEIN, *An Example on the Heisenberg Group Related to the Lewy Operator*, Inv. Math., **69** (1982), 209-216.

Dipartimento di Matematica – Politecnico di Torino
C.so Duca degli Abruzzi, 24 - 10129 Torino; email: gorelli@calvino.polito.it
Dottorato in Matematica (Sede amministrativa: Torino) - Ciclo X
Direttore di ricerca: Prof. Fulvio Ricci (Politecnico di Torino)